Instituto de Educación Media Superior

Dirección Académica - Dirección de Innovación

Compendio
de estrategias de enseñanza para
Matemáticas

Academia de Matemáticas

Jornadas Académicas, enero a junio de 2006

Presentación

El Instituto de Educación Media Superior (IEMS) fortalece día a día el proyecto educativo del Sistema de Bachillerato del Gobierno del Distrito Federal, con propósito de proporcionar a los estudiantes los conocimientos suficientes para adquirir una cultura científica y humanística general, así como favorecer el desarrollo de las habilidades y actitudes necesarias para una formación básica.

Como parte del Modelo Educativo, desde sus inicios, se decidió la incorporación de Docentes, Tutores e Investigadores de tiempo completo para atender a la población estudiantil que ingresa a este sistema, esta condición particular de todos los profesores del IEMS ha permitido impulsar la reflexión y preparación de materiales de apoyo a la docencia y al proceso de aprendizaje. La gran mayoría de ellos han sido elaborados en coordinación con las diversas academias del Instituto y enriquecidos con la participación de los consultores de cada disciplina.

La serie consta de seis números que abordan varias disciplinas, su contenido incluye trabajos producto de las Jornadas académicas, otros generados al interior de academias por disciplina y otros más de carácter individual. Es conveniente mencionar que el contenido de los seis cuadernos de la serie mencionada se incorpora tal cuál fue publicado en su momento, nada se cambió, respetando su contenido, formato, etcétera.

Ahora, a través del Portal para docentes del Instituto que entre otros, comparte el objetivo por el cual dichos Cuadernos fueron publicados, se ha decido difundir los trabajos de *la Serie*, con la idea de ampliar las posibilidades de intercambio docente. Además, se irán incorporando otros materiales que por razones diversas ya no se publicaron en dicha serie, es el caso del Compendio de Estrategias de Matemáticas, para los cuatro cursos del plan de estudios, elaborados igualmente en 2006. De la misma manera, las aportaciones generadas en las *Jornadas Académicas* que anualmente se realizan, podrán ser integradas en este espacio de los docentes.

Índice

Introducción

El presente compendio contiene una serie de estrategias de enseñanza para matemáticas diseñadas por profesores de la Academia de Matemáticas del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal.

Estas estrategias -junto con muchas otras que, desgraciadamente, por falta de tiempo y espacio no pudieron ser incluidas- fueron expuestas por los profesores en el marco de las *Jornadas Académicas* promovidas por el Instituto durante los meses de enero a junio de 2006.

A partir del momento de su exposición, cada una de las estrategias se ha ido enriqueciendo con la crítica y sugerencias que vertieron durante las *Jornadas Académicas* los docentes y con las observaciones que, para efectos de publicación, realizó el Lic. Modesto Lujano, de donde estamos seguros que las distintas propuestas aquí presentadas serán de gran utilidad para nuestro quehacer cotidiano como profesores generándonos ideas que puedan ser amoldadas a las características propias de cada uno de nuestros grupos o realizar nuevas estrategias y actividades de enseñanza a partir de las experiencias desarrolladas.

Por otro lado, es claro que las estrategias que presentamos pueden ser perfeccionadas, pero esto sólo puede ser logrado si se muestran a la mirada crítica de nuestros colegas y si son aplicadas por otros profesores dentro de otros contextos socioculturales o, inclusive, distintos espacios académicos (asesorías, horas de estudio, etcétera).

Aunque ya existe un espacio (en los *Cuadernos de Apoyo a la Docencia* editados por el IEMS[1]) para la publicación de este tipo de estrategias, creemos que la publicación de este volumen es muy importante puesto que

- Muestra el enorme trabajo que han realizado los profesores de la Academia de Matemáticas con objeto de hacer más atractiva e interesante esta disciplina a sus estudiantes.
- Es necesario tener este tipo de materiales para ofrecerlo a los profesores de

1 Incluso algunas de las estrategias presentadas aquí ya fueron publicadas en los *Cuadernos de Apoyo a la Docencia*.

nuevo ingreso y que estos puedan tener un acercamiento al modelo educativo a través de las experiencias que se han ido construyendo dentro del mismo.

- Es fundamental para la madurez y fortaleza del trabajo académico dentro de la Academia de Matemáticas, principalmente en vista de los retos a los que nos enfrentamos actualmente, por ejemplo, la adecuación de los programas de estudio y el lograr realizar una evaluación más homogénea.
- Logra socializar las estrategias de enseñanza para matemáticas que se producen en los diferentes planteles del sistema de bachillerato del IEMS.

Esperamos que este Compendio de Estrategias de Enseñanza logre fomentar el trabajo académico, trazar líneas de interrelación entre las academias de matemáticas de los distintos planteles y generar una gran cantidad de ideas que puedan ser llevadas al aula permitiendo el acceso a nuestros estudiantes a una mayor cultura matemática.

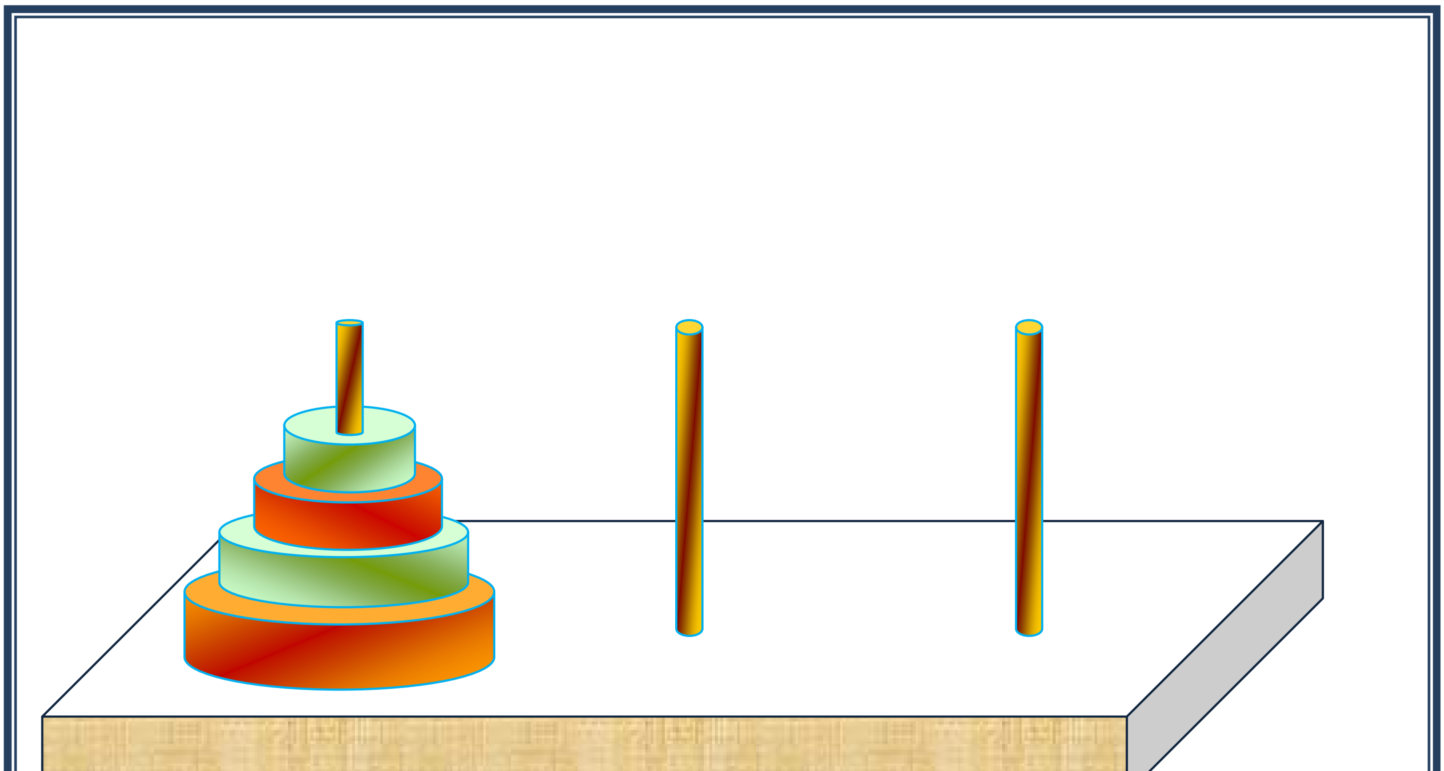
Finalmente, queremos agradecer el apoyo incondicional que, para realizar el proceso de compilación de estas estrategias y para muchos otros proyectos, siempre tuvimos por parte de la mat. Guadalupe Lucio Gómez-Maqueo, durante el tiempo que fungió como directora general del IEMS.

Fernando René Martínez Ortiz

Francisco Javier Santillán Covarrubias

Juan Jiménez Krassel

ESTRATEGIAS PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS I



Nociones básicas de la Geometría

Sara Edith Miranda Barreto

Introducción

La importancia de la presente estrategia radica en que fomenta en el estudiante la intuición geométrica, al tiempo que lo lleva a desarrollar una de las habilidades más importantes -y difíciles de adquirir- de la Matemática: el razonamiento deductivo. Lo más interesante en este caso es que el desarrollo por parte del estudiante de este tipo de razonamiento, se oculta tras una fachada lúdica e informal en la que una actividad inofensiva como hacer dobleces en una hoja de papel lleva al alumno a cuestionarse acerca de si sus respuestas (o las de sus compañeros) realmente responden a las preguntas y retos propuestos por el profesor.

Por otro lado, se pretende lograr que el estudiante se involucre en mayor medida en la construcción de su propio conocimiento motivando su acercamiento a la Geometría, a través de situaciones cotidianas como lo son los planos de escaleras rectas, en los cuales es importante trazar rectas paralelas y perpendiculares, además de considerar medidas adecuadas tanto para la huella como para el peralte.

De esta manera el estudiante desarrolla competencias como modelación matemática (utilizando su sentido de medida y forma puede hacer modelos de escaleras y puede razonar acerca de cómo sería el modelo óptimo), *resolución de problemas matemáticos, razonamiento matemático* (desarrollo formal e informal de argumentos matemáticos y transformación de argumentos heurísticos en demostraciones válidas) y uso de herramientas y ayudas (uso de regla y compás y/o escuadras).

Este material apoya el logro de los Objetivos 1, 4 y 5 del programa de Matemáticas I, enunciados a continuación:

1. Desarrollará su capacidad de razonamiento y uso del lenguaje.

4. Comprenderá las nociones básicas de la Geometría utilizándolas para caracterizar y estudiar figuras geométricas.

5. Utilizará tablas y gráficas para representar fenómenos.

<table>
<tr><th>COMPETENCIAS</th><th>ACTIVIDADES</th><th>CRITERIOS</th></tr>
<tr><td>Desarrolla el sentido de medida y forma</td><td>1. Situaciones de la vida cotidiana que conducen a nociones como la de punto, recta, líneas paralelas, perpendiculares, etc. (Geometría -Clemens-)
2. Doblado de papel: nociones básicas.
3. Respecto a las definiciones.
4. Doblado de papel. Construcciones con regla y compás. Dibujos con escuadras: construir y deducir.</td><td rowspan="2">Identifica los elementos básicos de la Geometría como punto, línea, ángulo y propiedades básicas de algunas figuras como triángulos, cuadriláteros y círculos.

Identifica y aplica los conceptos de medida (ángulos, longitudes, área, volumen -paralelepípedos, cilindros-).</td></tr>
<tr><td>Aplica las propiedades características de las figuras y cuerpos elementales en la resolución de problemas geométricos contextualizados.</td><td>5. Plano de escaleras rectas (Objetivos 1 y 5).</td></tr>
</table>

1. Situaciones de la vida cotidiana…

Vivimos rodeados de cosas en las que podemos observar distintas figuras geométricas. En la vida diaria hacemos muchas cosas que tienen que ver con la geometría. Por ejemplo, cuando queremos partir un hilo en dos partes iguales, ¿qué hacemos?, no usamos la regla, sino que hacemos coincidir los extremos del hilo, estiramos y cortamos. Otro ejemplo es lo que hacemos para partir una hoja de papel a la mitad. Cosas como las anteriores las hacemos frecuentemente y sin pensar mucho para hacerlas.

2. Doblado de papel: nociones básicas

Noción de recta, punto, segmento, ángulo, rectas paralelas, rectas perpendiculares, plano, etcétera.

3. Respecto a las definiciones

Libro I de Los Elementos:

a. Un *punto* es aquello que no tiene parte.

b. Una *línea* es una longitud sin anchura.

.

.

.

j. Cuando una línea recta se levanta sobre otra línea recta haciendo ángulos adyacentes iguales, cada uno de los ángulos es *recto* y la línea recta levantada sobre la otra es llamada *perpendicular* a aquella sobre la cual se levanta.

Hay una problemática seria con respecto a las definiciones. Usualmente para definir una palabra hacemos uso de otras palabras y, principalmente, de sinónimos de aquella. Como el número de sinónimos (o incluso, el número de palabras mismo) es finito, en algún momento uno de los sinónimos utilizados vuelve a repetirse, de donde la definición pierde sentido pues, después de seguir la cadena de sinónimos, tendríamos definiciones como "un *perro* es... ¡Un perro!". Por ejemplo, en la anterior definición de *línea* en Los Elementos podríamos ya preguntarnos: bueno, pero ¿qué es una *longitud*?

La actitud de la Matemática ante esta problemática ha sido la de eliminar las definiciones de ciertos objetos matemáticos básicos, considerando sus nombres como nociones primitivas indefinibles, dando prioridad no al *qué* son sino al *cómo* se comportan entre ellos y con respecto a otros objetos matemáticos.

4. Doblado de papel, construcciones con regla y compás, dibujos con escuadra: construir y deducir.

Mediatriz, bisectriz, perpendicular a una recta que pasa por un punto fuera de ella, triángulo, triángulo equilátero, etcétera.

Ejercicio antes de construir la mediatriz

Observa y contesta las preguntas

a. ¿El punto P, está más cerca de A o de B?

   ¿Puedes señalar otros puntos que estén más cerca de A que de B? ¿Y algunos puntos que estén más cerca de B que de A?

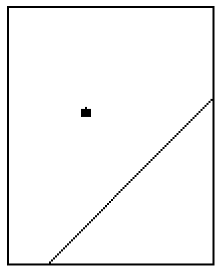
b. Ilumina con rojo la región del plano donde se encuentran los puntos que están más cercanos de A que de B y de azul la región donde se encuentran los puntos que están más cerca de B que de A?

c. ¿Dónde se encuentran los puntos que están a la misma distancia de A que de B?

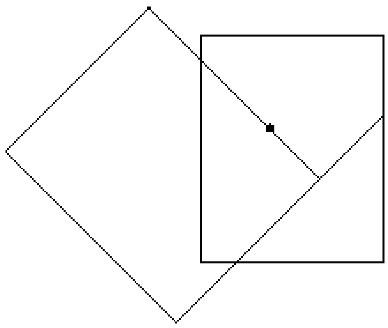
Ejemplos de deducciones

Distancia más corta entre un punto y una recta, suma de los ángulos de un triángulo.

a. Dibuja una línea recta y un punto que no esté sobre ella.



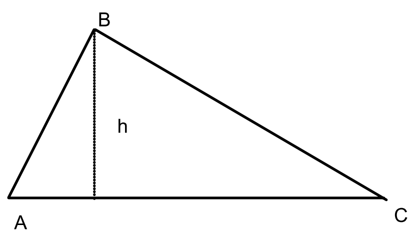
b. Usa la orilla de una hoja para encontrar la distancia más corta ente el punto y la línea. (el siguiente dibujo no se incluye en la práctica que se les va a dar a los estudiantes)



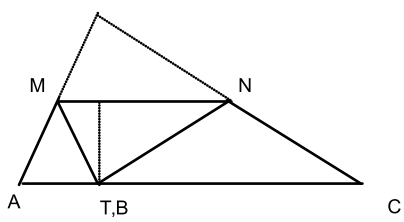
c. ¿Cómo se determina la distancia más corta entre el punto y la línea?, puedes hacer un dibujo.

Suma de los ángulos de un triángulo

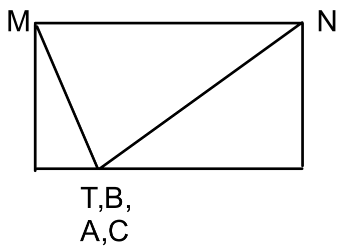
a. Recorta un triángulo. Apóyalo sobre el lado más largo. Doblando traza una altura sobre ese lado.



b. Doblando lleva B sobre T



c. Lleva también A y C sobre T



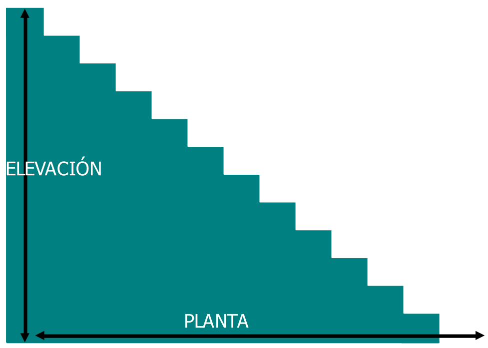
d. Los tres ángulos dibujados suman ________.

Pero esos ángulos son los ángulos del triángulo de partida, es decir, los ángulos de un triángulo suman ________.

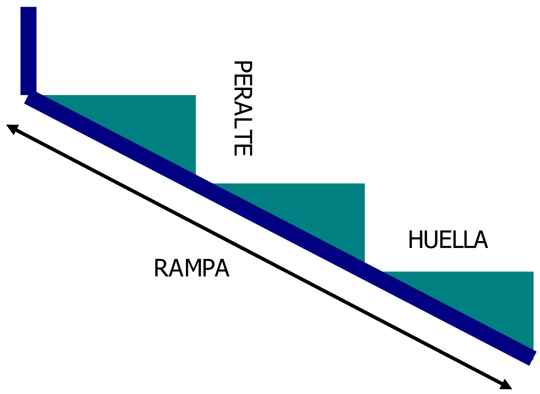
4. Plano de escaleras rectas

Las rectas paralelas y las perpendiculares las encuentras por todos lados: en ladrillos, en puertas, en ventanas, etc. En las escaleras los bordes de los escalones son generalmente rectas perpendiculares y para hacer el diseño de ellas necesitas además usar rectas paralelas.

En algunos planos arquitectónicos se representan escaleras como en la siguiente figura



¿Cómo hacen los arquitectos para determinar la altura (peralte) y el ancho (huella) de los escalones?



La escalera en la Pirámide del Sol en Teotihuacán está muy empinada, cuesta trabajo subirla, los escalones son muy incómodos; la huella es chica y el peralte es alto; se debe a que la elevación es alta comparada con la planta. ¿Tú crees que en una escalera recta se puede poner cualquier peralte y cualquier huella a los escalones? Investiguémoslo.

1. Supón que necesitas construir una escalera recta de 3 metros de planta y 2 metros de elevación. Usa la siguiente figura para hacer el plano indicando las medidas de los escalones (huella y peralte), cuida que se pueda subir cómodamente por tu escalera.

2. Responde las siguientes preguntas

    a. ¿En cuántas partes quedó dividida la planta?_______, ¿son iguales entre sí estas partes? _________.

    b. ¿En cuántas partes quedó dividida la elevación?______, ¿son iguales entre sí estas partes? _________.

    c. ¿En cuántas partes quedó dividida la rampa?________, ¿son iguales entre sí estas partes? _________.

    d. ¿Cuántos escalones tiene tu escalera? __________.

    e. ¿Cuánto mide el peralte de cada escalón? _______, ¿cuánto mide la huella?______.

    f. ¿Tu escalera es cómoda de subir? _________.

3. En una escalera con 25 escalones iguales, la elevación mide 2.5 m = _______cm y la planta mide 3 m = _______cm, ¿cuánto mide el peralte de cada escalón?_______, ¿cuánto mide la huella? __________. ¿Es cómoda esta escalera? ___________.

Como puedes darte cuenta, en las escaleras rectas la huella y el peralte no se pueden escoger como uno quiera. Si la escalera es muy empinada y queremos que sea recta, los escalones serán incómodos. Por eso a veces se utilizan otros tipos de escaleras, como por ejemplo las de caracol.

4. Completa la tabla

PERALTE	# DE ESCALONES	ELEVACIÓN
____ cm	20	3 m = _______ cm
____ cm	15	2.7 m = ______ cm
____ cm	21	315 cm
16 cm		320 cm
		4 m = _______ cm

Conclusiones

Escribe tus respuestas mediante una fórmula.

1. Si conoces la elevación (e) y el número de escalones (n), ¿cómo determinas el peralte (p)?

2. Si conoces el peralte y el número de escalones, ¿cómo determinas la elevación?

3. Si conoces el peralte y la elevación, ¿cómo determinas número de escalones?

Se puede continuar con división de un segmento en partes iguales.
Se puede comenzar a estudiar pendiente.

Evaluación

La evaluación se realiza, en un primer momento, dentro del salón de clases mediante la participación de los estudiantes ante las preguntas del profesor y mediante el involucramiento de aquéllos en las actividades a realizar, señaladas anteriormente. Finalmente, se proporciona a los alumnos una serie de ejercicios para hacerlos como tarea y se evalúan los avances y limitaciones en el espacio de asesoría académica.

Tarea

1. Encuentra el peralte de un escalón cuya huella mide 30 cm y que se encuentra en una escalera recta de 3 m de elevación y 2 m de planta.

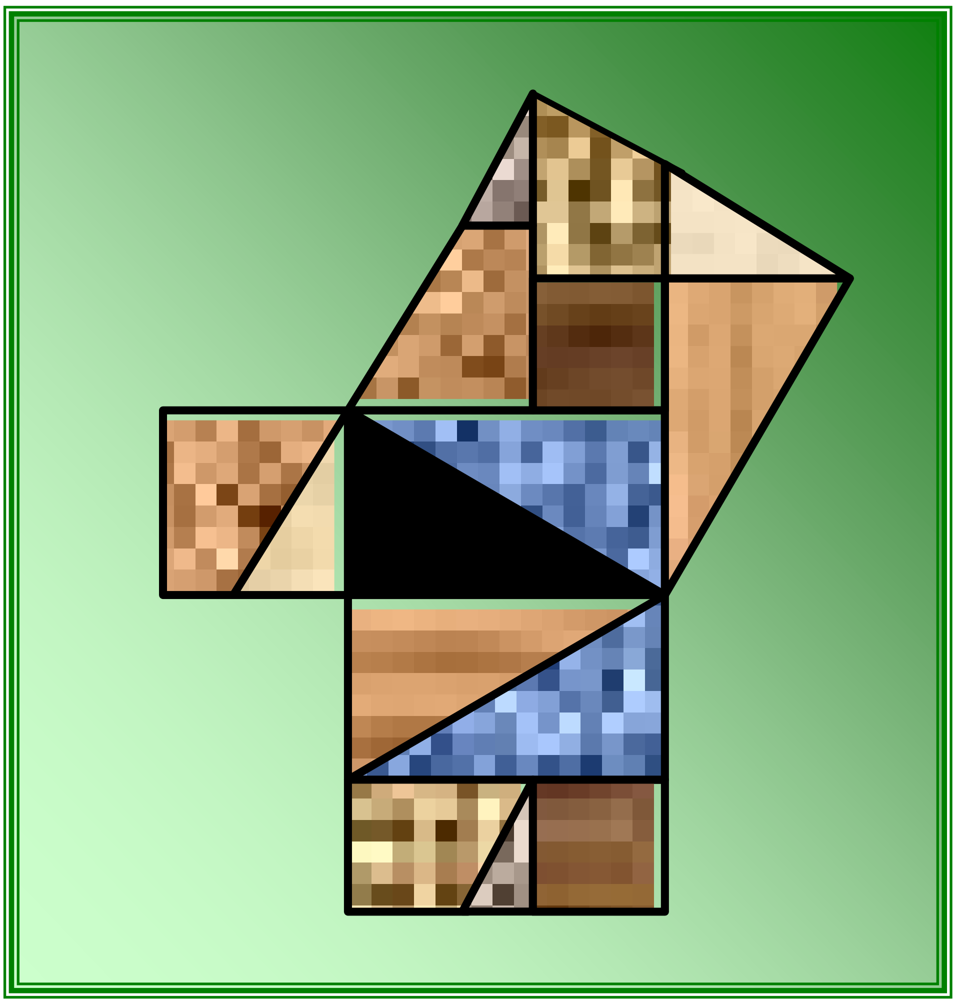
2. Halla la huella de un escalón de una escalera recta con elevación de 3 m y planta de 2.50 m cuyo peralte mide 30 cm.

3. Completa la siguiente tabla.

ELEVACIÓN	PLANTA	PERALTE	HUELLA
3.25 m	2.70 m	30 cm	
4.15 m	3.20 m	20 cm	
3.00 m	1.90 m		25 cm
3.90 m	1.90 m		28 cm
3.90 m	2.40 m		30 cm

4. ¿Qué dato obtienes al dividir la planta (l) entre la huella (h)?
5. Si conoces la planta, la huella y la elevación de una escalera ¿cómo determinas el peralte?
6. Recuerda, ¿qué dato obtienes al dividir la elevación entre el peralte?
7. Si conoces la elevación, el peralte y la planta de una escalera ¿cómo determinas la huella?

ESTRATEGIAS PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS II



Actividades en el Geoplano

Juan Gabriel Herrera Alva

Introducción

La Matemática ha sido una de las disciplinas más difíciles que ha cultivado el ser humano. Su desarrollo ha sido obra de hombres y mujeres excepcionales, muchos de los cuales la han considerado como un juego con reglas muy rígidas, pero con una belleza interna que sólo quienes se adentran a jugarlo pueden ser capaces de apreciar.

La intención de la presente estrategia es darle este carácter lúdico a temas que, normalmente, son vistos de una manera tan árida y seria que los estudiantes no son capaces de entender su importancia, olvidando completamente los temas en cuanto se les presentan nuevos contenidos.

Durante el desarrollo de la estrategia se pretende que el estudiante se familiarice con el concepto de pendiente de una recta y con la ecuación de la recta, dentro de un contexto lúdico que le permita hacer suyos estos conceptos de una manera más intuitiva y que le permita aplicarlos en otras situaciones de manera más ágil.

Por otro lado, la interacción entre los estudiantes durante la construcción del Geoplano y la realización de la actividad propician una mejor integración del grupo.

Las competencias que se espera que los estudiantes desarrollen durante la aplicación de la estrategia son:

- Pensar matemáticamente. En este aspecto se pretende que el estudiante pueda entender y manejar de manera ágil los conceptos de pendiente de una recta y de ecuación de una recta.

- Modelación matemática. Se espera que el estudiante sea capaz de manejar modelos algebraicos lineales y su interpretación geométrica logrando pasar de uno al otro de manera fluida, además de traducir e interpretar los elementos de un modelo en términos de la “realidad” modelada.

- Manejo de símbolos matemáticos y formalismos. Se hace un manejo importante de expresiones algebraicas y fórmulas que remite inmediatamente a la capacidad del estudiante para entender y manipular símbolos matemáticos y fórmulas.

Conocimientos Previos

Para la aplicación de la estrategia se deben haber trabajado previamente los siguientes temas:

- Fracciones. Saber sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.
- Área de figuras planas sencillas como cuadrados, rectángulos y triángulos.
- Ubicación de puntos en el plano cartesiano.
- Pendiente de una recta.
- Ecuación de la recta “punto-pendiente”.

Actividad Previa. Construcción del Geoplano

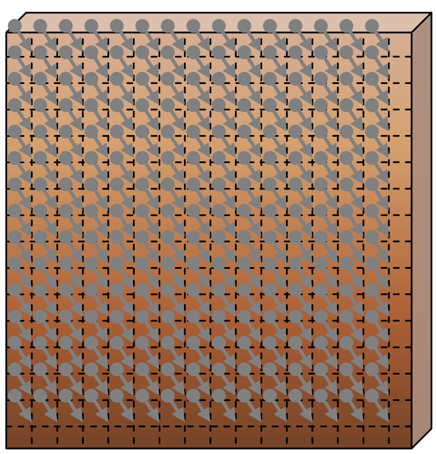
(Duración: 1 sesión de hora y media)

Material

- 1 tabla cuadrada de madera de 32 cm x 32 cm x 2 cm
- 1 bolsa de ligas medianas de colores
- 225 pijas
- 1 regla convencional
- 1 martillo
- 1 lápiz
- 1 libreta cuadriculada donde se marquen las líneas y los vértices, semejante al Geoplano

Procedimiento

Se traza con el lápiz un margen de 2 cm alrededor de la tabla. A partir de nuestro margen se trazan cuadrados de 2 cm por lado a partir de una de las esquinas del margen y en cada vértice se coloca una pija como se muestra en la figura.



Aplicación a Matemáticas II

(Duración: 2 sesiones de hora y media)

Objetivo del juego

Usando ecuaciones de la recta, “tocar” las figuras del oponente.

Reglas

- Se fija una marca en el centro del Geoplano que represente al origen de coordenadas.
- Se divide al grupo en parejas y cada pareja jugará con otra.
- Cada pareja tiene un Geoplano y su libreta previamente cuadriculada.
- No se permite ver el Geoplano del oponente.
- Las parejas armarán con ligas, sobre el Geoplano, 3 figuras no necesariamente regulares, cada una de área 6 cuadrados del Geoplano aproximadamente.
- Las figuras no pueden estar encimadas.

Instrucciones

1. Se sortea el orden en el que las parejas iniciarán el juego, suponiendo que la pareja A tira primero.
2. La pareja A proporciona un par de coordenadas enteras las cuales registra en su libreta y traza el segmento de recta que une esas coordenadas (con el fin de llevar un registro de sus tiradas para que no las repita y se cerciore al final, de que la pareja B no haya hecho trampa).

1. La pareja B, fija una liga en su Geoplano uniendo los puntos correspondientes a las coordenadas que proporcionó la pareja A.
2. En caso de que esa liga intersecte a alguna de las figuras del Geoplano de la pareja B, la pareja B preguntará a la A la ecuación de la recta representada por la liga.
3. Las ecuaciones serán expresadas de la forma “punto-pendiente” y simplificadas al máximo.
4. Ambas parejas tienen que hallar la ecuación de la recta. En caso de que la pareja A que había “tocado” una figura de la pareja B, no haya encontrado correctamente la ecuación, el tiro será anulado y no se puede volver a proporcionar ese par de coordenadas.

5. En caso en que no haya acuerdo en la ecuación correcta, el maestro actuará de juez para validar o no el tiro.

6. Si la pareja A acertó el tiro al encontrar adecuadamente la ecuación, tiene derecho a otro tiro y así sucesivamente.

7. En caso de que la pareja A "falle" algún tiro, ya sea por no "tocar" a ninguna figura de la pareja B o por fallar en el cálculo de la ecuación de la recta, se cede el turno a la pareja B y se repite la mecánica del juego.

8. En el momento en que una figura de la pareja A o B sea "tocada" dos veces, esa figura ya no será considerada en tiros posteriores.

9. El juego termina cuando alguna de las parejas "toque" dos veces a cada una de las figuras de la pareja oponente.

10. Al final del juego, las parejas intercambian sus Geoplanos para compararlos con los registros hechos en las libretas y checar que los resultados hayan sido correctos.

11. En caso de duda, el profesor volverá a intervenir como juez.

12. Otra versión posterior del juego es que las tiradas se hagan proporcionando la ecuación de las rectas, en lugar de un par de coordenadas. Se sugiere que la pendiente de la recta sea racional y la ordenada al origen, entera.

Observaciones

- Se sugiere que para obtener la ecuación de la recta, las parejas calculen la pendiente contando el desplazamiento en "y" y en "x" con los dedos, contando los cuadritos correspondientes.

- Para obtener la pendiente se hace el cociente: (Desplazamiento en "y") entre (Desplazamiento en "x").

El signo que se asigna a ese cociente es positivo en caso de que el ángulo de la recta con respecto a cualquier horizontal sea menor a 90º contrario a las manecillas del reloj. Si ese ángulo es mayor a 90º y menor a 180º, el signo será negativo.

Evaluación

Dentro del mismo salón de clases se puede realizar una evaluación del grado de habilidad alcanzado por los estudiantes para encontrar la ecuación "punto-pendiente" dadas las dos parejas de coordenadas enteras por el equipo contrario. Sin embargo el espacio de asesoría académica es idóneo para realizar una evaluación más personalizada que se puede hacer utilizando el mismo juego o las variantes del mismo mencionadas en las observaciones. Incluso se puede dejar algún ejercicio fuera del contexto del Geoplano con objeto de que el profesor se cerciore que el estudiante realmente ha comprendido los conceptos trabajados en la estrategia y no ha actuado mecánicamente por imitación del proceder de los compañeros.

Recomendaciones

En la elaboración del Geoplano nunca se utilicen clavos, ya que puede resultar peligroso porque los estudiantes suelen jugar con las ligas estirándolas demasiado de manera que los clavos se van aflojando, y en algunos casos se zafan de manera violenta al estirar las ligas.

Una alternativa puede ser el uso de pijas de plástico y en vez de una tabla de madera pueden usar foamy grueso.

ESTRATEGIAS PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS III

Factorización de expresiones algebraicas

Sandra Cristóbal Roldán
Fernando René Martínez Ortiz

I.- ¿Qué es la factorización?

(Duración: 1.5 h en el salón de clase)

Se entiende que se factoriza un número cuando se expresa como el producto de dos o más números; claro que cualquier número es susceptible de factorizar puesto que se puede expresar como el producto de él mismo multiplicado por 1. Sin embargo, deseamos en general obtener factorizaciones más interesantes.

En el contexto de los números naturales se ha trabajado en el curso de Matemáticas I ya con factorizaciones; así, si consideramos que cada cuadradito es una unidad, podemos representar cada número natural (en ocasiones de diferentes maneras) como rectángulos formados por estos cuadraditos en número igual al número que se desea representar. Por ejemplo en la Figura 1 se muestran todas las posibles representaciones de cada uno de los primeros nueve números naturales, en ella, cuando se producen dos representaciones que forman rectángulos congruentes, sólo ponemos una de ellas, es decir, para el número 8, por ejemplo, tenemos las representaciones de 4 por 2 y la de 2 por 4 (donde el primer número corresponde a la base del rectángulo) de las cuales sólo hemos puesto la primera:

La primer factorización que se observa en la figura es aquella que corresponde al caso que carece de importancia para nosotros, a saber, el del producto de cada número por la unidad. Podemos observar además que algunos de los números sólo tienen esa factorización los cuales son claramente el número uno o los números primos.

Por otro lado hay cuatro números que aparecen con dos factorizaciones distintas. La segunda de ellas es la que más nos interesa pues expresa a los números 4, 6, 8 y 9 como un producto de dos números ninguno de los cuales es el uno.

$$4 = 2 \times 2, \quad 6 = 3 \times 2, \quad 8 = 4 \times 2 \quad \text{y} \quad 9 = 3 \times 3$$

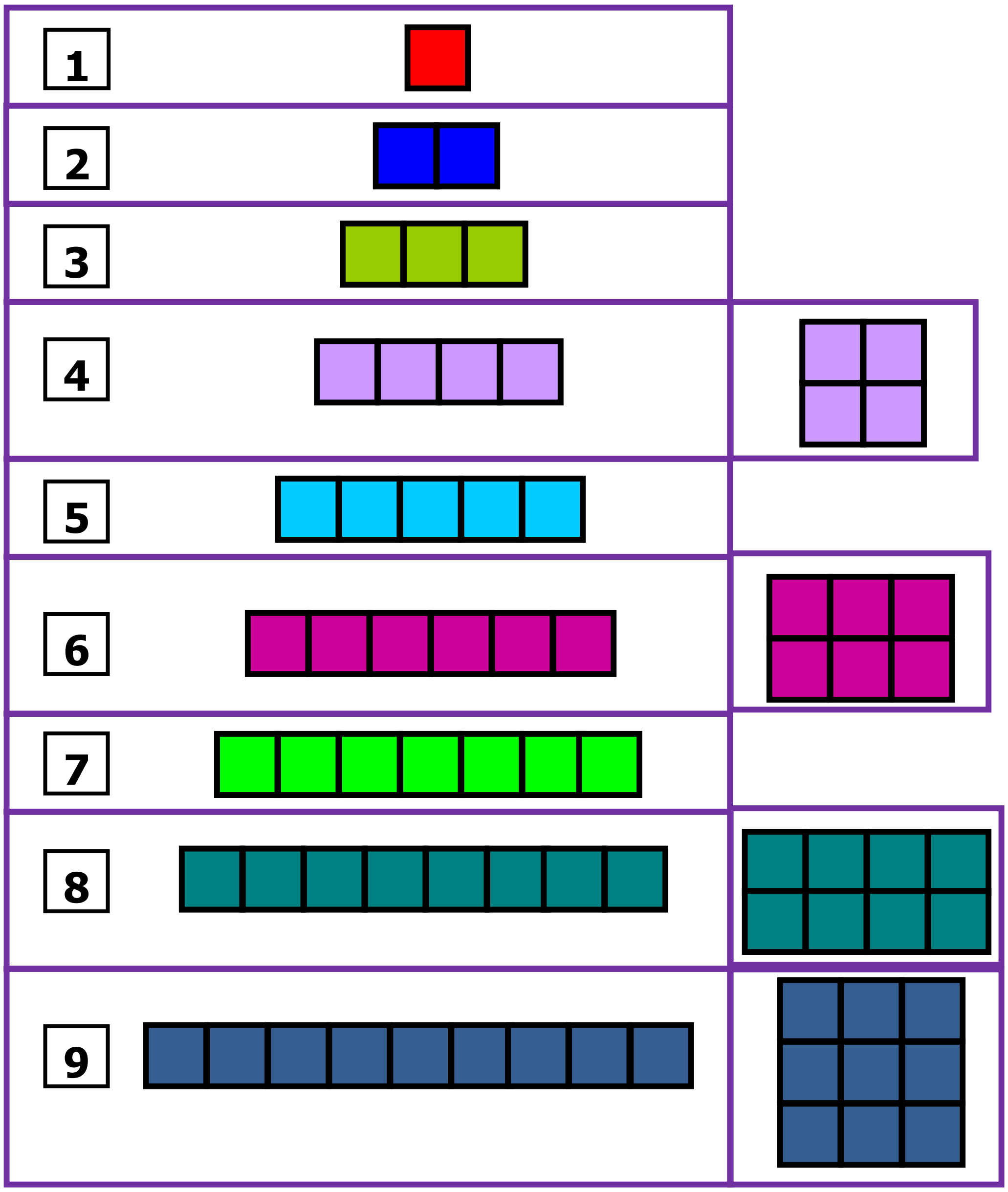


Figura 1. Representaciones rectangulares de los primeros nueve números.

Ejercicio.- Encontrar todas las factorizaciones de los números 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16 representándolas tanto geométrica como aritméticamente.

La importancia de la factorización radica en que nos permite, por un lado, realizar operaciones de sumas más rápidamente (finalmente la multiplicación fue introducida para realizar atajos en las sumas con sumandos iguales) y, por otro, es la herramienta fundamental para resolver ecuaciones algebraicas tanto de primero como de segundo grado. La factorización es también importante para el trabajo experimental, en el cual, la herramienta básica es la estadística y, para ésta, se requieren bases algebraicas sólidas.

Como ejemplos de la importancia de la factorización pondremos:

El Niño Gauss

Cuenta una vieja historia que, corriendo el año de 1787 en la pequeña ciudad de Brunswick en Alemania, el viejo profesor Büttner ideó una estrategia de enseñanza cuyo principal objetivo era mantener ocupados durante largo tiempo a sus pequeños y molestos estudiantes mientras él tomaba un merecido descanso. La estrategia consistía en pedir a la clase encontrar el valor de la suma de los primeros cien números naturales, es decir, calcular la suma:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

En la cual nos hemos ahorrado escribir todos los sumandos al utilizar puntos suspensivos.

Ejercicio.- Aunque este tipo de sumas ya se trabajó en el curso de Matemáticas I, repasemos con nuestros alumnos, solicitándoles que encuentren el valor de la suma de los primeros 100 números naturales.

Volviendo a nuestra historia, resultó que el viejo Büttner apenas se estaba acomodando en su sillón cuando uno de aquellos mozalbetes de unos 10 años y de nombre Karl Friedrich Gauss entregó su pizarra con el resultado correcto: ¡5050!. La clave para haber obtenido tan rápidamente el valor de la suma radicó en que el pequeño Gauss no se puso a sumar como sus compañeros sino que encontró una factorización escalofriante: dividió la suma en dos partes, la primera constaba de la suma desde el 1 hasta el 50 y la segunda, desde el 51 hasta el 100. Esta última la colocó debajo de la primera pero con los sumandos invertidos; finalmente sumó columna por columna dándose cuenta inmediatamente de que cada una de las columnas sumaban el mismo número, 101, como se muestra abajo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 49 & + & 50 \\ + & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 52 & + & 51 \\ \hline & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Observando que los números rojos del primer renglón nos informan cuántos 101's tenemos que sumar, encontramos que el valor de la endiablada suma

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

Se puede obtener como (50) (101) = 5050

¡Vaya, las factorizaciones sí sirven y nos evitan un gran esfuerzo!

Ejercicios

1. Utilice el procedimiento de Gauss para calcular el valor de las siguientes sumas:

   a. 1 + 2 + 3 +… + 200

   b. 1 + 2 + 3 +… + 202

   c. 1 + 2 + 3 +… + 204

   d. 1 + 2 + 3 +… + 206

   e. 1 + 2 + 3 +… + 208

2. Utilice el mismo procedimiento para encontrar una fórmula para el valor de la siguiente suma en la cual n es un número par:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

3. Verifique que el procedimiento de Gauss también puede ser utilizado cuando se desea sumar números consecutivos hasta un número impar. Por ejemplo, para la suma:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 101$$

   Divídala en tres partes:

$$\mathbf{(1 + 2 + 3 + \ldots + 50) + (51) + (52 + \ldots + 98 + 99 + 100)}$$

   Aplique el procedimiento a la primera y última partes y sume finalmente el 51 restante.

4. Calcule la suma de los primeros 50 números pares: 2 + 4 +… + 98 + 100

   Geométricamente el procedimiento de Gauss equivale a mostrar que un número triangular puede ser transformado en un rectángulo. Aquí, los números triangulares se forman a partir de la representación con cuadrados del número 1, añadiendo en cada paso un nuevo renglón de cuadrados con un cuadrado más que los que contaba el renglón anterior como se muestra en la Figura 2 en la cual aparecen los tres primeros números triangulares, 1, 3 y 6.

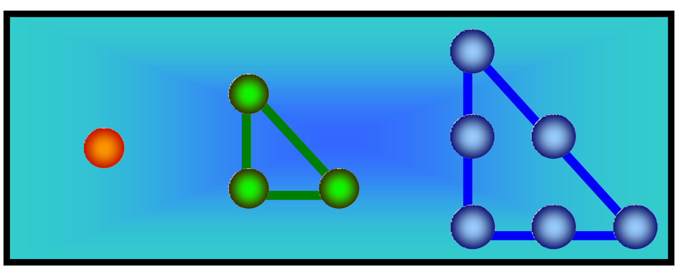


Figura 2. Los tres primeros números triangulares en los que los cuadrados fueron remplazados por círculos.

El procedimiento de Gauss se realiza recortando el número triangular a la mitad de su altura y pegando los dos pedazos de manera que se forme un rectángulo que muestre la factorización de la suma. Figura 3.

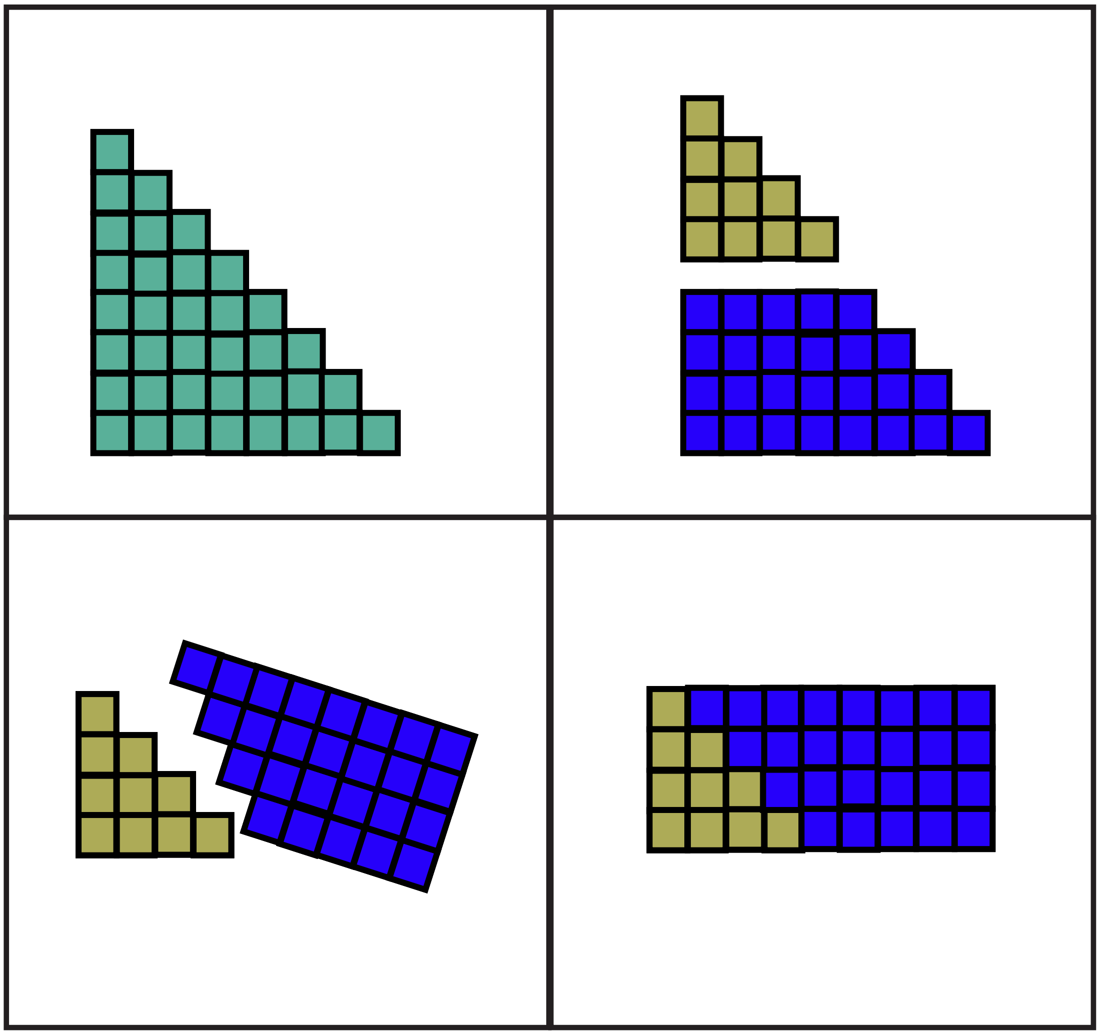


Figura 3. Si el número triangular tiene altura par, córtelo por la mitad de su altura y ensamble las piezas de manera que se forme un rectángulo.

II. La tabla de números cuadrados y expresiones algebraicas equivalentes

(Duración 3 h en el salón de clase)

Trabajaremos ahora con el siguiente patrón de crecimiento de figuras geométricas. El patrón comienza con un cuadrado como primer paso. En el segundo paso, en cada uno de los vértices, exceptuando el vértice superior izquierdo, se le pega el vértice de un nuevo cuadrado congruente con el primero. Este proceso se realiza nuevamente para obtener la figura en el tercer paso, etcétera. Las primeras figuras en el patrón geométrico de crecimiento son como sigue:

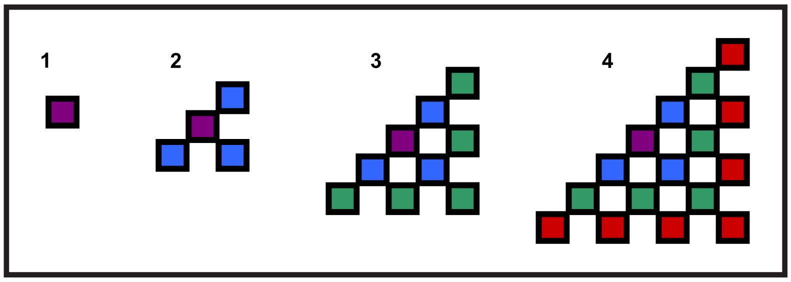


Figura 4. Patrón geométrico de crecimiento.

La pregunta es ¿cuántos cuadrados tendrá la figura que se forma en el paso 50? La intención de la presente estrategia es que dentro del salón de clase surjan distintas respuestas después de analizar la información ordenada en la siguiente tabla que sintetiza los puntos relevantes del patrón de crecimiento ubicándolos en "número de paso" y "número de cuadrados en dicho paso".

Para poder obtener la respuesta a la pregunta realizada se debe fomentar la búsqueda de relaciones aritméticas dentro de la tabla que permitan obtener el "número de cuadrados" en un paso dado utilizando preferentemente valores que se encuentren en la columna de la izquierda "número de paso".

Número de paso	Número de cuadrados
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Algunas posibles soluciones son: "Si se suman los valores de las tres celdas sombreadas entonces se obtiene el valor de la celda faltante en ese grupo de cuatro".

Número de paso	Número de cuadrados
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

“Multiplico por cuatro el valor de la celda sombreada en azul y le sumo el valor de la celda sombreada en verde para obtener el valor de la celda sombreada en rojo”

Número de paso	Número de cuadrados
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Y, en las siguientes tablas:

1a.- “Se multiplica el valor de la celda izquierda por sí mismo”

2a.- “Se multiplican los valores de las celdas sombreadas y al resultado se le añade 1”

3a.- “Se multiplican los valores de las celdas sombreadas y al resultado se le añade 4”

4a.- “Se multiplican los valores de las celdas sombreadas y al resultado se le añade 9”

1a		2a		3a		4a	
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	4	2	4	2	4
3	9	3	9	3	9	3	9
4	16	4	16	4	16	4	16
5	25	5	25	5	25	5	25
6	36	6	36	6	36	6	36
7	49	7	49	7	49	7	49

Si los estudiantes no han logrado obtener todas las anteriores respuestas al problema, es importante que el profesor se las presente puesto que deseamos trabajar con las expresiones algebraicas que las modelan y con el hecho de que dichas expresiones son equivalentes.

Para poder obtener expresiones algebraicas a partir de las anteriores tablas, hay que dejar primeramente en claro que los valores de la columna de la izquierda pueden ser modelados con una simple x y, en este contexto, los valores de la columna de la derecha de cada tabla serán modelados por la variable y. Dichas variables representarán a números que se encuentren en el mismo renglón, así, en la primera de las cuatro tablas que nos ocupan, podemos encontrar que la expresión algebraica que la modela es $y=(x)(x)$ o, más concretamente $y=x^2$

Con las demás tablas es importante intentar que la modelación algebraica surja dentro del salón de clase aunque el profesor debe apoyar activamente la discusión puesto que las respuestas de los estudiantes son, en su mayoría, erróneas. El profesor debe tratar de ir completando las mismas tablas pero con expresiones algebraicas, principalmente en las celdas que fueron sombreadas:

1a		2a		3a		4a	
$x-2$		$x-2$		$x-3$		$x-3$	
$x-1$		$x-1$		$x-2$		$x-2$	
x	x^2	x	$(x-1)(x+1)+1$	$x-1$		$x-1$	
$x+1$		$x+1$		x	$(x-2)(x+2)+4$	x	$(x-3)(x+3)+9$
$x+2$		$x+2$		$x+1$		$x+1$	
$x+3$		$x+3$		$x+2$		$x+2$	
$x+4$		$x+4$		$x+3$		$x+3$	

Finalmente, se debe hacer énfasis en que las cuatro expresiones obtenidas deben ser equivalentes puesto que modelan la misma tabla; además es importante observar que la más simple de todas ellas es precisamente la primera, la que se encuentra factorizada.

Ejercicio

a) Desarrolle los productos y simplifique las tres últimas expresiones para mostrar que cada una de ellas es equivalente a x^2.

b) Para las primeras dos soluciones no realizamos el trabajo de expresarlas utilizando álgebra puesto que para encontrar el valor de alguna de las celdas de la derecha, era necesario tener el valor de alguna de las celdas anteriores de esa misma columna. Utilice la solución $y = x^2$ para encontrar la expresión algebraica que modela estas soluciones. Por ejemplo, en la primera de ellas se tendría la tabla:

Número de paso	Número de cuadrados
$x-3$	
$x-2$	
$x-1$	$(x-1)^2$
x	
$x+1$	

III. Factorización por factor común

(Duración: 3 h en el salón de clase)

Geométricamente este tipo de factorización es muy simple, la idea es que si se tienen dos números factorizados y uno de los factores aparece en ambos, entonces la suma de aquellos también tiene a ese número como factor, es decir, si tenemos dos números representados como rectángulos y la altura de ambos rectángulos es la misma, entonces la suma de los números se puede representar geométricamente como un rectángulo que tiene la misma altura que aquéllos.

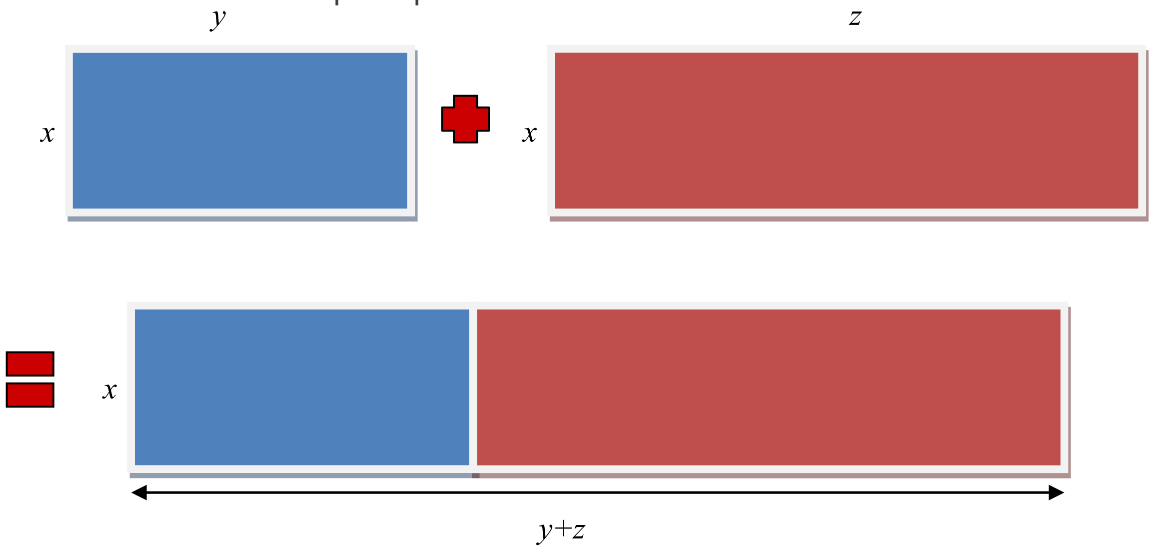


Figura 5. Factorización por factor común.

Lo cual, algebraicamente, se puede expresar como

$$x \cdot y + x \cdot z = x(y + z)$$

en donde, mientras que la expresión en el miembro izquierdo del signo de igualdad no está factorizada (es una suma de dos números), en el miembro derecho tenemos una expresión algebraica equivalente **factorizada**.

Como un ejemplo, tenemos en la siguiente tabla a los primeros múltiplos de 5. En ella se observa que todos ellos son números cuya cifra de las unidades es 5 ó 0. Utilizaremos la factorización de un factor común para demostrar que “todo número natural cuya cifra de las unidades es 5 ó 0 es un múltiplo de 5”. Inicialmente observaremos que tanto 0 como 5 son múltiplos de 5 pues

$$0 = 5 \times 0 \qquad \text{y} \qquad 5 = 5 \times 1$$

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
105	110	115	120	125	130	135	140	145	150

cualquier número que termina en 0 se puede escribir como n × 10 + 0 donde la n es algún número natural, por ejemplo 420 = 42 × 10 + 0; mientras que cualquier número que termina en 5 se puede escribir como n × 10 + 5, por ejemplo 445 = 44 × 10 + 5. En el primer caso tenemos que

$n \times 10 + 0$	$=$	$n \times (2 \times 5) + (0 \times 5)$	Factorizando 10 y 0.
	$=$	$(n \times 2) \times 5 + 0 \times 5$	Asociatividad del producto.
	$=$	$5(n \times 2 + 0)$	Factorizando el factor común 5.
	$=$	$5(n \times 2)$	Simplificando la expresión en el paréntesis.

de manera que cualquier número que termine en 0 es múltiplo de 5. En el segundo caso tenemos

$n \times 10 + 5$	$=$	$n \times (2 \times 5) + (1 \times 5)$	Factorizando 10 y 5.
	$=$	$(n \times 2) \times 5 + 1 \times 5$	Asociatividad del producto.
	$=$	$5(n \times 2 + 1)$	Factorizando el factor común 5.

Así, cualquier número que termine en 5 también es múltiplo de 5.

Ejercicio.- Demuestre que cualquier número cuya cifra de las unidades sea 0, 2, 4, 6 u 8 es múltiplo de 2.

En este punto se trabaja tanto con la teoría como con los ejemplos usuales de factorización por factor común que aparecen en cualquier texto de Álgebra.

IV. Factorización de diferencia de cuadrados

(Duración: 3 h en el salón de clase)

Un hecho bien conocido es que al tomar las diferencias entre números cuadrados consecutivos se van obteniendo los números impares. Geométricamente es visualmente claro que, se puede formar el siguiente número cuadrado a partir del anterior añadiendo un número impar de unidades colocadas convenientemente como se muestra en la Figura 6.

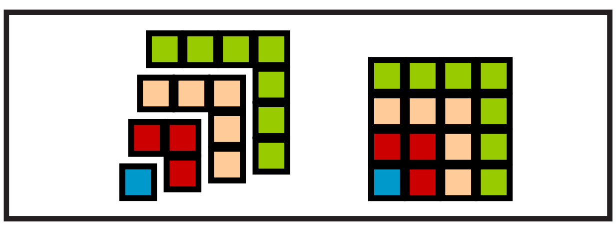


Figura 6. Diferencias de cuadrados consecutivos producen números impares.

La pregunta es, si tomamos diferencias de cuadrados que no sean consecutivos, ¿podremos encontrar una fórmula, quizá factorizada, para expresarlas?

En la siguiente tabla aparecen en el primer renglón y la primera columna, los números naturales y, en el segundo renglón y segunda columna, los cuadrados de los anteriores. Tomaremos aquí las diferencias entre los distintos cuadrados y colocaremos los valores de dichas diferencias dentro de la tabla. Es importante dejar que los estudiantes completen la tabla y que realicen conjeturas para llenarla más rápido; por ejemplo, ya sabemos que en la diagonal adyacente a la diagonal con ceros aparecen los impares y, se puede observar que la siguiente diagonal está formada por los múltiplos de cuatro, etcétera.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	1	0	3	8	15	24	35	48	63	80	99
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3		1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
4	16	-15	-12	-7	0	9	20	33	48	65	84
5	25	-24	-21	-16	-9	0	11	24	39	56	75
6	36	-35	-32	-27	-20	-11	0	13	28	45	64
7	49	-48	-45	-40	-33	-24	-13	0	15	32	51
8	64	-63	-60	-55	-48	-39	-28	-15	0	17	36
9	81	-80	-77	-72	-65	-56	-45	-32	-17	0	19
10	100	-99	-96	-91	-84	-75	-64	-51	-36	-19	0

Por la forma en que se construyó la tabla, tenemos que en cada uno de los renglones lo podemos expresar utilizando el álgebra, como una diferencia de cuadrados. Repetiremos la tabla pero con la expresión algebraica correspondiente a cada renglón en la última columna.

		1	2	3	4	5	6	7	8	x
		1	4	9	16	25	36	49	64	x^2
1	1	0	3	8	15	24	35	48	63	$x^2 - 1^2$
2	4	-3	0	5	12	21	32	45	60	$x^2 - 2^2$
3	9	-8	-5	0	7	16	27	40	55	$x^2 - 3^2$
4	16	-15	-12	-7	0	9	20	33	48	$x^2 - 4^2$
5	25	-24	-21	-16	-9	0	11	24	39	$x^2 - 5^2$
6	36	-35	-32	-27	-20	-11	0	13	28	$x^2 - 6^2$
7	49	-48	-45	-40	-33	-24	-13	0	15	$x^2 - 7^2$
8	64	-63	-60	-55	-48	-39	-28	-15	0	$x^2 - 8^2$
9	81	-80	-77	-72	-65	-56	-45	-32	-17	$x^2 - 9^2$
10	100	-99	-96	-91	-84	-75	-64	-51	-36	$x^2 - 10^2$

Por otro lado, ¡podemos encontrar los valores de cada renglón haciendo multiplicaciones en lugar de restar cuadrados! es decir, ¡podemos factorizar las expresiones de la columna de la derecha!, por ejemplo, observemos que al multiplicar los números de las celdas sombreadas en negro se obtiene el número de la celda sombreada en el renglón inferior.

		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
		1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**
1	**1**	0	3	8	15	**24**	35	48	63	80	99

De esta manera podemos factorizar este renglón como (x - 1) (x + 1). Es decir se tiene la siguiente igualdad de expresiones algebraicas: $x^2 - 1^2 = (x-1)\,(x+1)$.

Ejercicio.- Encuéntrense expresiones algebraicas que estén factorizadas para cada uno de los renglones de la tabla.

Finalmente, es importante hacer notar en clase que todas las equivalencias algebraicas obtenidas con la anterior tabla se pueden condensar en una única equivalencia algebraica: $x^2 - y^2 = (x-y)\,(x+y)$.

Nuevamente en este punto es importante que los estudiantes realicen una serie de ejercicios del tipo de los que aparecen en los textos usuales de álgebra y que se familiaricen con la nomenclatura algebraica (diferencia de cuadrados, producto de binomios conjugados).

V. Factorización de trinomios cuadrados perfectos.

Duración: 3 h en el salón de clase

Un trinomio cuadrado perfecto es una expresión algebraica que consta de tres términos los cuales, cuando se representan geométricamente forman un cuadrado. Pero ¿qué significa representar geométricamente una expresión algebraica?

Para representar geométricamente una expresión algebraica debemos considerar que cada término corresponde al área de una figura geométrica de manera tal que sumar términos significa encontrar el área de la figura que resulta al pegar lado a lado las figuras que representan a cada término sin traslaparlas.

Para representar geométricamente términos constantes (números) podemos utilizar las representaciones geométricas que consideramos en la parte inicial de la estrategia, pensando que los cuadrados que conforman el número tienen base y altura de tamaño 1, es decir, área 1. Por ejemplo, ya vimos que podemos representar geométricamente al número 5 como:

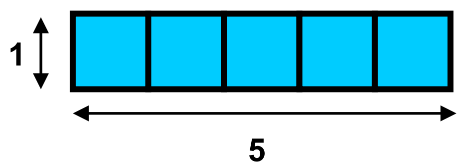


Figura 7. Representación geométrica del término constante 5.

Para representar geométricamente al término x, basta con dibujar un rectángulo con altura x y base 1 (o de base x y altura 1) donde, como desconocemos x, podemos tomar una altura (o base, en el segundo caso) cualquiera, aunque debemos estar conscientes de que esa medida siempre representará a x en la representación geométrica de una expresión algebraica en particular.

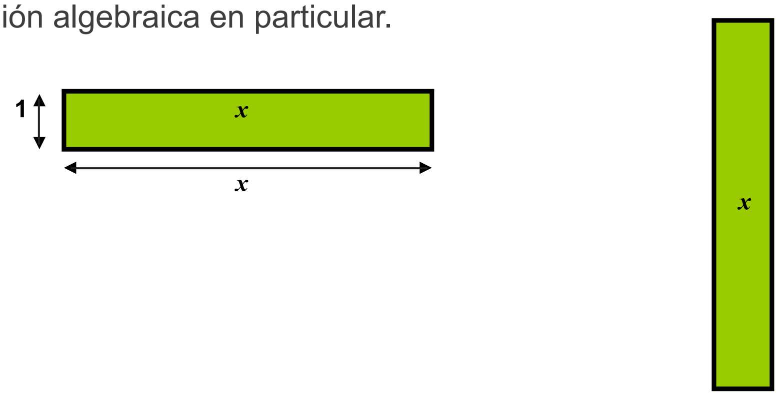


Figura 8. Representaciones geométricas del término lineal x.

De manera que, por ejemplo $3x$, se representa geométricamente en cualquiera de las dos formas siguientes:

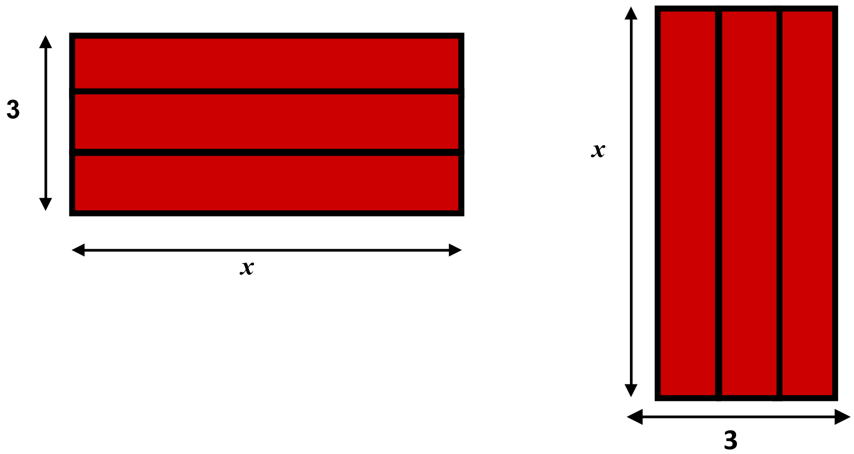


Figura 9. Representaciones geométricas del término lineal $3x$.

Finalmente, la representación geométrica de la expresión algebraica x^2 es, como el nombre de la operación lo indica, un cuadrado de base y altura iguales a x.

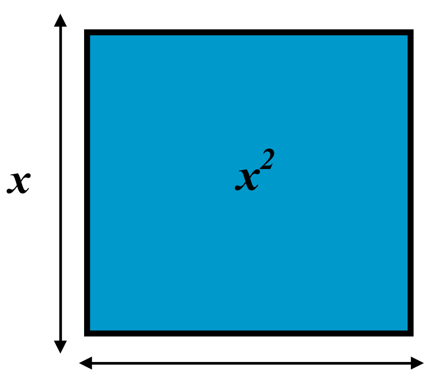


Figura 10. Representación geométrica del término cuadrático x^2.

Armados con estas piezas geométricas para representar expresiones algebraicas podemos comenzar a acomodarlas para averiguar cuál o cuáles trinomios pueden ser llamados “cuadrados perfectos”. Por ejemplo el trinomio

$$x^2 + 4x + 4$$

es un trinomio cuadrado perfecto, pues con las piezas geométricas correspondientes a los términos del trinomio podemos formar un cuadrado perfecto (bueno… realmente no sé cómo se podría formar un cuadrado imperfecto).

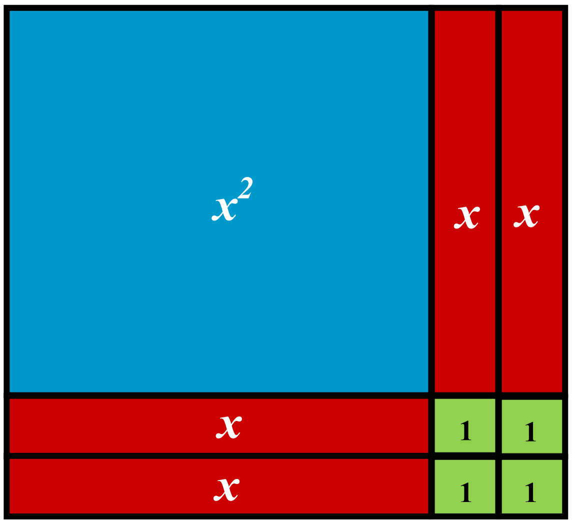


Figura 11. Un trinomio cuadrado perfecto.

Obsérvese que se obtiene un cuadrado más grande cuya base tiene de longitud $x+2$ y, por ser cuadrado, su altura también, de manera que una expresión algebraica equivalente a $x^2 + 4x + 4$ es $(x+2)(x+2)$ o, lo que es lo mismo $(x+2)^2$.

En este punto se trabajan una serie de ejemplos de trinomios cuadrados perfectos y de trinomios que no son cuadrados perfectos hasta lograr que el estudiante se sienta cómodo manipulando este tipo de entes algebraicos.

Sin embargo, la estrategia que nos ocupa pretende apoyar mediante la Geometría y la Aritmética al desarrollo algebraico de los estudiantes, de manera que se empleará nuevamente una tabla numérica para redondear los distintos puntos de vista acerca de los trinomios cuadrados perfectos. Así, considérese las siguientes dos tablas: la primera sólo es auxiliar y, en cada celda aparece simplemente la suma de los números en el primer renglón y la primer columna que se encuentran sobre y a la izquierda de aquella.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

Después, en esta primera tabla, se multiplica el valor en cada celda por el valor sobre ella que se encuentra en el primer renglón; también se multiplica el valor de la celda por el valor que se encuentra a su izquierda en la primer columna y se suman los dos resultados. El valor de esta suma se coloca en la celda correspondiente de la segunda tabla.

En la segunda tabla todos los resultados son números cuadrados. Es más, son los cuadrados de la suma de los números en la primer tabla. Esto debe ser claro para los estudiantes si se hace el siguiente razonamiento: para llenar la segunda tabla multiplicamos $x + y$ por x, $x + y$ por y, y sumamos los resultados, es decir, obtuvimos $x(x+y)+y(x+y)$ pero la expresión $x + y$ es un factor común, así que podemos factorizar la última expresión algebraica como

$$(x+y)\,(x+y)$$

lo cual es, claramente, equivalente a

$$(x+y)^2$$

Cálculo Mental

Se puede aprovechar en asesoría académica las equivalencias algebraicas

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

para encontrar mentalmente el cuadrado de ciertos números, por ejemplo el cuadrado de 31 se puede calcular fácilmente pues el cuadrado de 30 es 900, el cuadrado de 1 es 1 y “el doble del primero por el segundo” es 60, así, el cuadrado de 31 es 961. Por otro lado el cuadrado de 29 sería 901 - 60 = 841.

¿Cómo completar trinomios cuadrados perfectos?

Héctor Pérez Serrano.

Introducción

Una de las causas por las cuáles me interesó entrar a trabajar a éste sistema de enseñanza es el enfoque diferente que se le da a la enseñanza de las Matemáticas, se pretende que el alumno deje de manejar los algoritmos sólo como receta de cocina y que sea más responsable de su aprendizaje. El hecho de aplicar solamente algoritmos sin "justificación" alguna, influye para que se olvide rápidamente lo aprendido. En cambio, por éste método el alumno sería capaz de que sí en algún momento se olvida del algoritmo, pueda reconstruirlo usando este proceso geométrico. Al mismo tiempo, esta estrategia nos libera de memorizar la solución general de segundo grado, los resultados al aplicar esta estrategia fueron satisfactorios y esto me facilita incluso el trabajo con las cónicas que es un tema de Matemáticas III.

Los conocimientos previos que se requieren son:

- Fórmulas para hallar el área de cuadrados y rectángulos.
- Multiplicación de polinomios.
- Leyes de los exponentes.

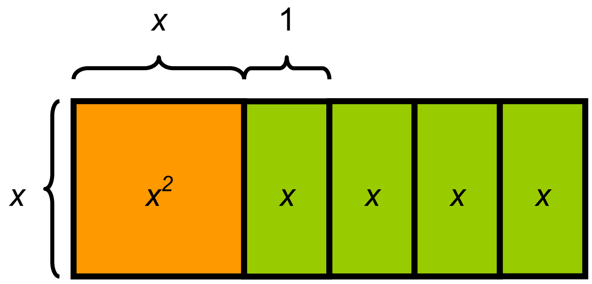
Esta actividad no está enfocada para trabajarla con un sólo objetivo ya que es trasversal a los objetivos 1, 3, 4 y 5 del curso de Matemáticas III; ya que el alumno hace uso de lenguaje algebraico, desarrolla su razonamiento analítico, relaciona propiedades geométricas usando expresiones algebraicas, trabaja con función cuadrática y se aplica en el análisis de las cónicas (En este semestre modifique la estrategia para factorización).

Estrategia

Primera sesión

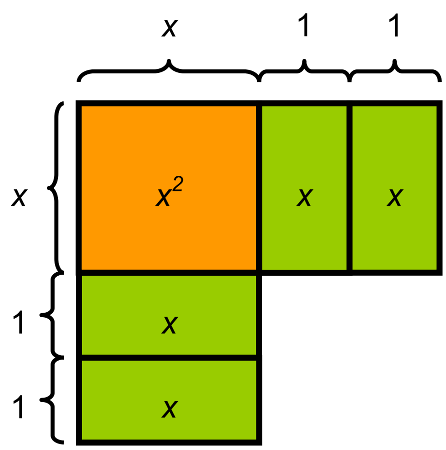
Problema: Se plantea encontrar un número x tal que satisfaga la ecuación $x^2 + 4x = 140$. Para resolver esta ecuación se le indica a el alumno (usando una presentación en Power Point desarrollada previamente) que realice los siguientes pasos.

1. Construya un cuadrado de lado x y cuatro rectángulos de base la unidad y altura x, tal como se muestra en la figura.



El área total es $x^2 + 4x$ que equivale a 140.

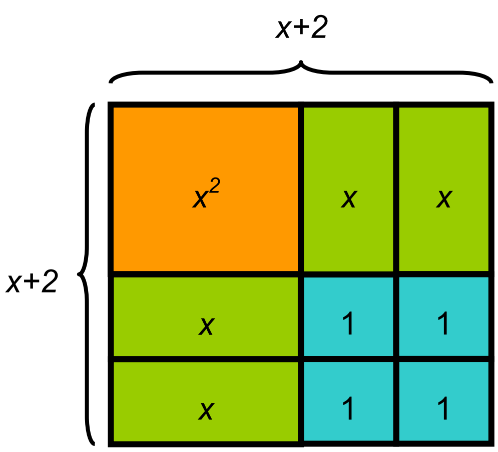
2. Lo rectángulos se reacomodan tal como se muestra, el área total sigue siendo la misma $x^2 + 4x = 140$, como se ve falta una figura para poder construir un cuadrado.



3. Se aumenta la figura que falta cuya área es igual a 4 unidades cuadradas, esta cantidad se debe aumentar en la ecuación, por lo cual se convierte en:

.

$$x^2 + 4x + 4 = 140 + 4$$



Lo cual es equivalente a

$$x^2 + 4x + 4 = 144$$

De la figura se ve que tenemos un cuadrado de lado $x + 2$, por lo cual el área total se puede reescribir como

$$(x + 2)^2 = 144$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos lados se obtiene

$$x + 2 = 12 \quad \text{y} \quad x + 2 = -12$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos

$$x = 10 \quad \text{y} \quad x = -14$$

El resultado que tiene sentido es el de $x = 10$, aun cuando la otra solución sea correcta. Esta actividad se realiza en una sesión.

Segunda sesión

En esta segunda sesión se pide al alumno que resuelva las ecuaciones cuadráticas, usando el método de la primera sesión, pueden trabajar en parejas o en forma individual. Los ejercicios propuestos son:

a. $x^2 + 4x = 60$

b. $x^2 + 2x - 80 = 0$

c. $x^2 + 6x - 16 = 0$

d. $x^2 + 8x - 33 = 0$

e. $x^2 + 12x = 85$

f. $x^2 + 40x = 225$

g. $x^2 + 3x = 28$

h. $x^2 + 5x - 14 = 0$

i. $x^2 - 4x - 12 = 0$

j. $x^2 - 6x = 40$

k. $9x^2 + 6x - 48 = 0$

l. $4x^2 + 12x = 16$

En este proceso, los alumnos responden bien con las primeras 5 ecuaciones, algunos ya los pueden resolver sin apoyarse en el dibujo, otros llegan a la sexta ecuación y se encuentran con el problema que deben dibujar muchos cuadrados y esto operativamente es complicado, por lo cual se ven forzados a prescindir del dibujo, se detienen para analizar el proceso y finalmente pueden resolverlo; en este proceso se apoyan con sus compañeros que ya lo entendieron.

Cuando el término lineal es un número impar usan decimales y finalmente lo resuelven en la mayoría de los casos. En el caso de coeficiente lineal negativo la mayoría de los alumnos aumentaron rectángulos de base -1, finalmente pudieron resolver las ecuaciones a pesar de este "problema". Sólo un promedio de 3 a 4 alumnos por grupo le quitaban área al cuadrado de lado x, pero luego no sabían qué hacer, en este punto, se les explicó a todo el grupo como resolver este caso, el cual quedó, finalmente, claro. A estas alturas ya era claro el procedimiento a seguir para completar cuadrados, se les pidió a los alumnos que describieran con sus propias palabras el procedimiento a seguir.

Con las últimas dos ecuaciones los estudiantes tratan de aplicar su método pero no funciona directamente, por lo cual vuelven a apoyarse en el dibujo y finalmente logran en la mayoría resolverlo, pero deben modificar lo que habían escrito para que su procedimiento pueda funcionar.

En este proceso se realiza un recorrido por las mesas y se detecta el progreso del alumno y sus dificultades, de esta forma se está evaluando, además se deja una tarea a resolver a casa, la cual se debe entregar en la siguiente sesión, una de las ecuaciones que queda de tarea es resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, muy pocos alumnos pudieron resolverlo (2 o 3 alumnos por grupo), sin embargo, cuando lo presentan ante el grupo la mayoría entendió el procedimiento y de esta forma verifican el porqué de la fórmula para la solución general.

Tercera sesión

En forma aleatoria se forman grupos de 4 o 5 alumnos y a cada equipo se le pide que resuelva alguna de las actividades siguientes. Se les advierte que se tomará tiempo límite para resolver su problema, después se forman nuevos equipos donde cada integrante explica la solución de su problema a sus nuevos compañeros. Se vuelven a integrar a sus equipos originales. Para evaluar el trabajo del equipo se pide a alguno de los integrantes la explicación de la solución de alguno de los problemas. Durante la sesión el profesor realiza un recorrido para apoyar con sugerencias a los equipos.

Actividad 1

Los alumnos deberán modelar y resolver el problema: determinar dos enteros cuya suma sea 26 y cuyo producto sea 165.

Actividad 2

Realizar la gráfica de la función cuadrática $y+8=x^2+2x$, hallar los puntos en donde cruza la curva al eje x.

Actividad 3

Observar el triángulo

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Siguiendo esta sucesión decir en qué renglón está el número 1275.

Actividad 4

Determinar el valor máximo o mínimo de la función $f(x)=x^2-6x+8$.

Las actividades en esta sesión pueden variar dependiendo de lo que se haya revisado en el curso, o de los conocimientos que tenga el alumno. Se debe aclarar que la evaluación será por equipo, y que se evaluará el aprendizaje cooperativo, para que realmente se trabaje en equipo.

Observaciones

Esta estrategia me ha funcionado en las 2 ocasiones que la he implementado en el curso de Matemáticas III. En la última ocasión modifique esta estrategia para abordar el tema de factorización y el resultado fue muy bueno. Además esta estrategia fue fundamental cuando revisamos el tema de cónicas.

Bibliografía

1. Matemática: Razonamiento y aplicaciones. Miller, Heeren, Hornsby. Ed. Pearson. Octava edición, 1999. México DF.

2. Álgebra. Max Sobel. Ed. Prentice-Hall. Segunda edición, 1996. México DF.

Gráficas de funciones cuadráticas

Francisco Constantino Luengas Bermúdez

Introducción

La presente estrategia ha sido diseñada para implementarse dentro de la asignatura de Matemáticas III.

Normalmente en los libros de texto se introduce la parábola como la curva que se obtiene al graficar una ecuación cuadrática en dos variables del tipo $y = ax^2 + bx + c$; el ejemplo más sencillo utilizado es $y = x^2$. A partir de esta ecuación el estudiante tiene que ir "descubriendo" la parábola dando distintos valores a x y obteniendo los valores de y asociados a aquellos, graficando los puntos resultantes y esbozando la curva (parábola) que pase por todos ellos. Sin embargo, generalmente el estudiante no es capaz de realizar todos estos pasos de manera adecuada, de donde el "descubrimiento" de la parábola resulta en realidad ser el descubrimiento por parte del profesor de que sus estudiantes deben volver a practicar leyes de signos y ubicación de puntos en el plano cartesiano, en especial de puntos con alguna (o ambas) de sus coordenadas negativas. Así, la primera intención de esta estrategia es que los estudiantes visualicen en primera instancia, la forma de la parábola a partir de una construcción geométrica y que, utilizando aritmética y una tabla con la información numérica ordenada, puedan obtener (o al menos comprender) la ecuación cuadrática $y = x^2$, por ejemplo.

El segundo punto que se espera que quede claro en los estudiantes al realizarse la estrategia, tiene que ver con los cambios geométricos que ocurren cuando se cambian los parámetros a ecuaciones del tipo $y = M(x-h)^2 + k$. El uso de acetatos hace más dinámica, visual y significativa la explicación del profesor y permite al estudiante descubrir las ecuaciones cuadráticas asociadas a las distintas configuraciones que forman el acetato con el plano cartesiano y el acetato con la parábola.

Competencias

Al realizar las actividades señaladas dentro de la estrategia, el estudiante podrá desarrollar:

- **Pensar matemáticamente**
  Más que aplicar irreflexivamente una o varias fórmulas y/o procedimientos, se espera que el estudiante, utilizando su razonamiento, logre obtener la ecuación cuadrática adecuada partiendo de su gráfica y viceversa; además de que se propicia que pueda entender el significado geométrico de los cambios de parámetros en la ecuación $y = M(x-h)^2 + k$.

- **Modelación matemática**
  El estudiante desarrolla su capacidad de manejar modelos geométricos, aritméticos (tablas con información numérica) y algebraicos cuyo uso con cierta habilidad

es indispensable para enfrentarse a las cónicas y, sobretodo, a los cursos de Matemáticas IV y Matemáticas V.

Duración

4 sesiones de hora y media.

Objetivos

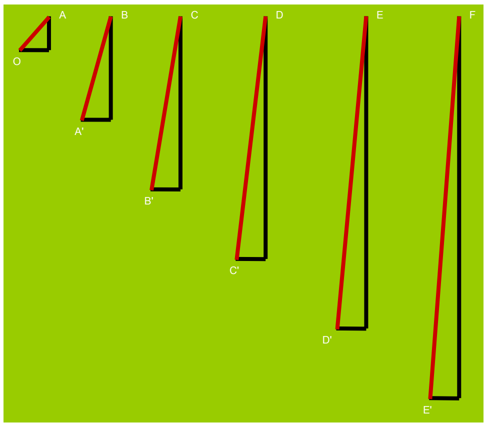
- Graficar ecuaciones de segundo grado del tipo $y = M(x-h)^2 + k$
- Identificar la ecuación con su gráfica.
- Graficar ecuaciones del tipo $y = ax^2 + bx + c$

Contenidos

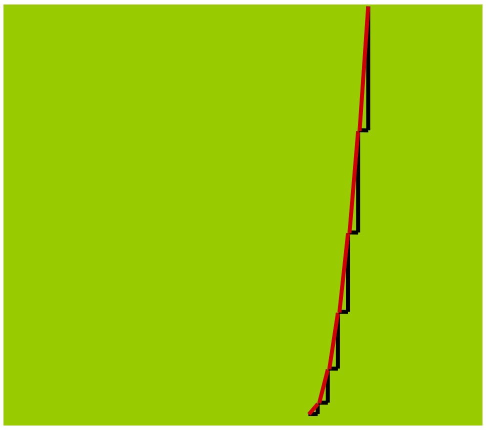
- Relaciona la ecuación con la gráfica de una función cuadrática.
- Encontrar máximos y mínimos de funciones cuadráticas.

Desarrollo

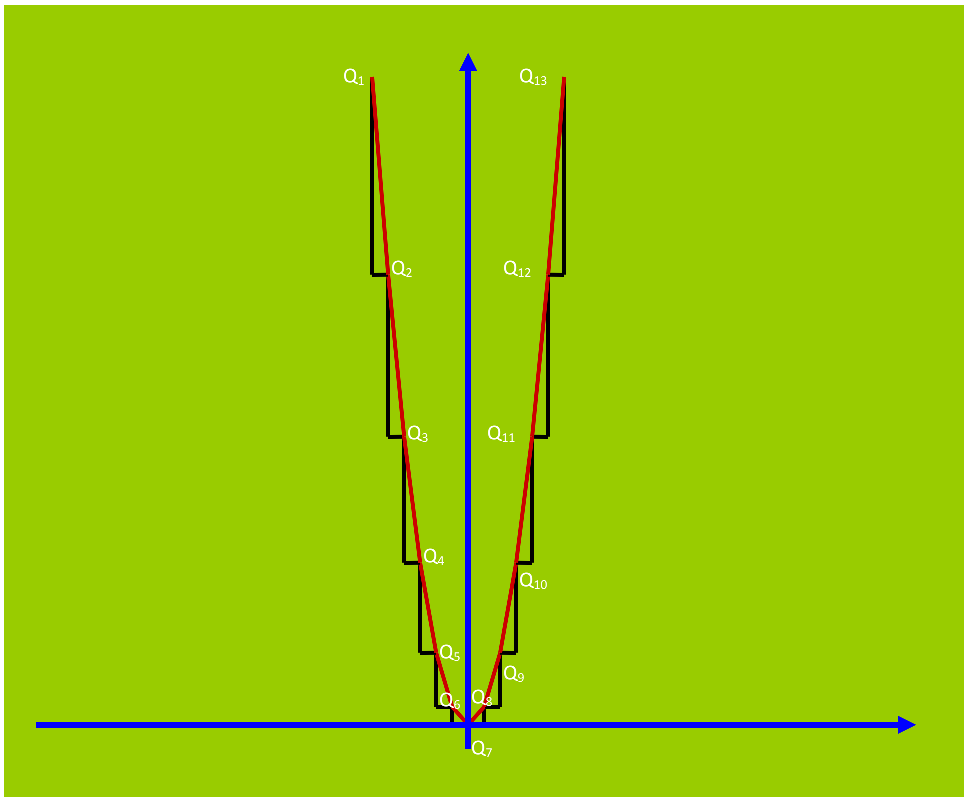
Consideremos la sucesión de los números impares 1, 3, 5, 7, 9, 11,...
Vamos a construir triángulos rectángulos: todos con base 1 y la longitud de la altura de 1, 3, 5, 7, 9, 11 (para fines prácticos dejémoslo hasta 11). Dibujemos la hipotenusa con color rojo.



Pongamos cada triángulo uno encima del otro, pero con la característica de que el vértice superior de un triángulo pequeño coincida con el inferior del triángulo mayor siguiente, (A con A', B con B', etc.), los ángulos rectos de todos los triángulos quedarán colocados del lado derecho.



Reflejemos esta figura sobre la línea vertical.
Breviario cultural: Cuando se refleja una curva sobre el eje "y", se dice que es simétrica con respecto al eje de las ordenadas, también que es una "función par".



Las coordenadas de cada Q_i son:

Punto	*x*	*y*
Q_1	-6	36
Q_2	-5	25
Q_3	-4	16
Q_4	-3	9
Q_5	-2	4
Q_6	-1	1
Q_7	0	0
Q_8	1	1
Q_9	2	4
Q_{10}	3	9
Q_{11}	4	16
Q_{12}	5	25
Q_{13}	6	36

Observamos que los valores de “*y*” tienen una característica muy especial. Todos ellos tienen raíz cuadrada exacta, o lo que es lo mismo si elevamos al cuadrado cada valor de “*x*”, obtenemos los valores de “*y*”. Lo cual se escribe como $y=x^2$

Es importante hacer notar que la última gráfica no es la de una parábola pero se parece demasiado. (Los únicos puntos donde coinciden la parábola y esta gráfica son los puntos Q_i).

El punto más bajo de una parábola se llama vértice *V*, en este caso particular coincide con el origen Q_7. (Para que nuestra curva se parezca lo más posible a la parábola hagamos una “curva suave” entre los puntos Q_6, Q_7 y Q_8 y realicemos esta gráfica en un acetato).

Ahora tomemos un plano cartesiano y la parábola en el acetato y bajemos el vértice de la parábola, sobre el eje “*y*” (usando un proyector y acetatos). Por ejemplo bajamos 3 unidades el vértice.

> ¿Qué le pasa a cada valor del eje “*y*”?,
> ¿En general que le pasa a la ecuación $y=x^2$?
> ¿Qué le pasa a la ecuación si subimos el vértice?
> ¿Cómo quedan escritas las ecuaciones de estas parábolas?

Ahora movamos el vértice hacia la izquierda del origen ¿Cómo sería la ecuación de esta parábola? Tomemos en cuenta que cuando $x=-3$ el valor de $y=0$ por este motivo la ecuación debe ser $y=(x+3)^2$.

De la misma forma, movamos el vértice hacia la derecha del origen, por ejemplo 6 unidades. Igual que en el caso anterior; cuando $x=6$ el valor de la ordenada debe ser $y=0$ y la ecuación que nos permite hacer esto es $y=(x-6)^2$.

Hagamos una reflexión: si observamos la ecuación $y=(x+h)^2$ significa que el vértice se movió *h* unidades a la izquierda, y con la ecuación $y=(x-h)^2$ el vértice se movió *h* unidades a la derecha. Para las ecuaciones anteriores $y=x^2+k$ el vértice sube *k* unidades o para $y=x^2-k$ el vértice baja *k* unidades. Apliquemos estos resultados para expresiones del tipo $y=(x\pm h)^2\pm k$

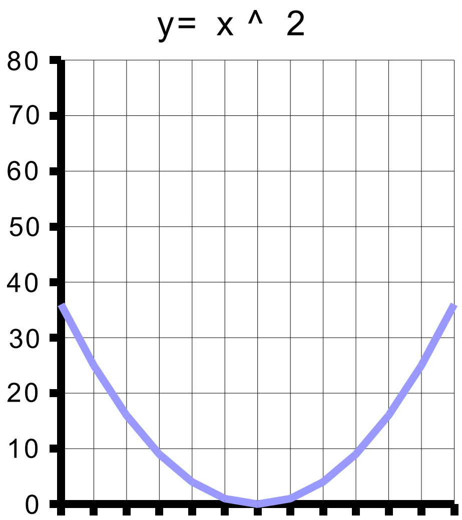
El vértice en la expresión $y=(x-5)^2+3$ está 5 unidades a la derecha y 3 hacia arriba, a partir de aquí se empieza a trazar la gráfica, aplicamos la sucesión 1, 3, 5, 7, 9 y 11, para tener una buena aproximación de la parábola (usamos nuestra curva trazada en el acetato).

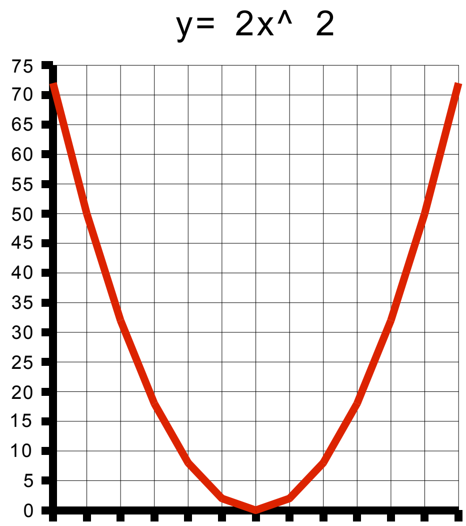
Ejercicios
a) $y=(x+2)^2-4$
b) $y=(x-1)^2+5$
c) $y=-(x-3)^2+2$

Analicemos la ecuación $y=2x^2$ usando una tabla

Punto	*x*	*y*	*Diferencias*
Q_1	-6	72	
Q_2	-5	50	22
Q_3	-4	32	18
Q_4	-3	18	14
Q_5	-2	8	10
Q_6	-1	2	6
Q_7	0	0	2
Q_8	1	2	2
Q_9	2	8	6
Q_{10}	3	18	10
Q_{11}	4	32	14
Q_{12}	5	50	18
Q_{13}	6	72	22

Graficamos y comparamos con la ecuación $y=x^2$.





Observamos que:

a. es más “estrecha” $y=2x^2$ que $y=x^2$.

b. la sucesión se convierte en 2, 6, 10, 14, 18, 22...

En general en la ecuación $y=M(x\pm h)^2 \pm k$ el parámetro: M afecta a la sucesión 1, 3, 5, 7, 9, 11...

c. $+h$ corre el vértice a la izquierda;

d. $-h$ corre el vértice a la derecha.

e. $+k$ sube el vértice; $-k$ baja el vértice

Entonces una expresión del tipo $y=3(x-1)^2+4$ significa que el vértice está 1 a la derecha y 4 arriba $V(1,4)$ y el 3 hace que la sucesión original 1, 3, 5, 7, 9, 11 se convierta en : 3, 9, 15, 21, 27, 33, ...

Otro ejemplo es $y=4(x+2)^2+1$ el vértice está en el punto $V(-2,1)$ y la sucesión que usamos para encontrar otros puntos de la parábola es 4, 12, 20, 28, 36, ...

Ejercicios

a. $y=5(x-3)^2-2$

b. $y=-3(x+2)^2+4$

c. $y=\frac{1}{2}(x-4)^2-3$

d. $y=-\frac{1}{3}(x+5)^2+2$

e. $y=2x^2-12x+19$

Recordatorio: para factorizar una expresión del tipo $y=3x^2-12x+16$. Primero agrupamos los primeros dos términos $y=(3x^2-12x)+16$, ahora a estos términos les aplicamos un factor común, $y=3(x^2-4x)+16$. El siguiente paso es completar el trinomio cuadrado perfecto. (El coeficiente del término lineal lo dividimos entre dos y lo elevamos al cuadrado; $-4\div 2=-2;$ $(-2)^2=4$); es decir, $y=3(x^2-4x+4-4)+16$, reagrupando $y=3(x^2-4x+4)-12+16$, el trinomio que está dentro del paréntesis, por ser cuadrado perfecto, se factoriza como: $y=3(x-2)^2+4$. y esta última expresión ya la hemos estudiado con detenimiento.

Evaluación

Los ejercicios aplicados tanto en el salón de clases como en el espacio de asesoría académica permiten evaluar que el estudiante:

- Relacione la ecuación con la gráfica de una función cuadrática.
- Encuentre máximos y mínimos en funciones cuadráticas.
- Compare los efectos de variar los parámetros en expresiones cuadráticas asociadas a parábolas.

Función cuadrática. Ecuación cuadrática

Fernando René Martínez Ortiz

Introducción

La asignatura de Matemáticas III marca un difícil escollo para los estudiantes de nuestro sistema y, en muchos casos también incluso para los propios profesores. Junto a la gran cantidad de estrategias que pueden ser encontradas en la literatura o diseñadas ex-profeso por el profesor cuyos contenidos apoyan directa o indirectamente las competencias que se pretenden desarrollar en los alumnos para las primeras dos asignaturas de los currícula de Matemáticas, nos encontramos con un gran vacío que nos impide trabajar con los temas de índole puramente algebraica a través de retos en los que se involucren los estudiantes.

Quizás la razón de esta escasez de "estrategias algebraicas" radique en el hecho de que la intuición y el razonamiento lógico con los que se pueden resolver la mayoría de los problemas de los dos primeros cursos, resultan inadecuados para encontrar la solución de, por ejemplo, la mayoría de las ecuaciones cuadráticas o de algún sistema de ecuaciones lineales. Más que esto, el alumno se ve empujado a aprender un lenguaje totalmente nuevo, con una multitud de reglas que parecen cambiar clase tras clase, que parecen no guardar conexión alguna con la Aritmética y la Geometría, con las que tienen ya alguna familiaridad y que el profesor espera que sean aprendidas casi de memoria, para poder trabajar lo más pronto posible con ellas hacia temas más avanzados.

Un extraño fenómeno que a mi parecer apoya los argumentos dados en los párrafos anteriores ocurre cuando, en una gran cantidad de casos, los alumnos de los primeros dos semestres de nuestro bachillerato obtienen mejores resultados en los concursos de Matemáticas —Interprepas o en la propia Olimpiada Matemática— que los alumnos de semestres más avanzados los que, en teoría, tienen más herramienta matemática y mayor experiencia en la solución de problemas. Esto nos incita a pensar que no hay un aprendizaje significativo del Álgebra en los alumnos y que los aparentes progresos de estos últimos, no son sino una respuesta condicionada para cumplir con las exigencias del profesor, impulsada por el afán de este último de sentirse socialmente útil.

La presente estrategia pretende trasladar algunas de las técnicas que se utilizan durante los dos primeros semestres al estudio de expresiones algebraicas sencillas pero de suficiente riqueza de manera tal que permita al alumno manejar de manera paulatina el álgebra; las técnicas son esencialmente, el uso y la creación de tablas y gráficas —que ordenen información numérica y proporcionen una imagen visual de los cambios de crecimiento de dichos datos— a partir de problemas de crecimiento de patrones geométricos; la exploración aritmética de dichas tablas y, finalmente, la búsqueda de un modelo algebraico que reduzca el número de operaciones aritméticas necesarias para la solución de un problema.

Prerrequisitos

Se requiere que el alumno haya madurado conceptos y habilidades como los siguientes:

- El Plano Cartesiano y ubicación de puntos dentro del mismo.

- Progresiones aritméticas, creación de tablas con uso de las variables x, y y graficación de la recta que pasa por esas parejas de puntos (es importante hasta aquí proporcionar sólo ejemplos que produzcan rectas que pasen por el origen). Ejemplo, proporcionando la lista numérica 3, 6, 9, 12, 15,…, se espera que el alumno pueda construir la tabla.

x (lugar en la lista)	y
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
. . .	. . .

- Descubrimiento de la fórmula que relaciona y con x (ecuación de la recta que pasa por el origen), comparación de distintas rectas que pasan por el origen y sus ecuaciones. Noción intuitiva de la pendiente de la recta como distancia que se debe “subir” o “bajar” cada vez que el valor de x aumenta en una unidad.

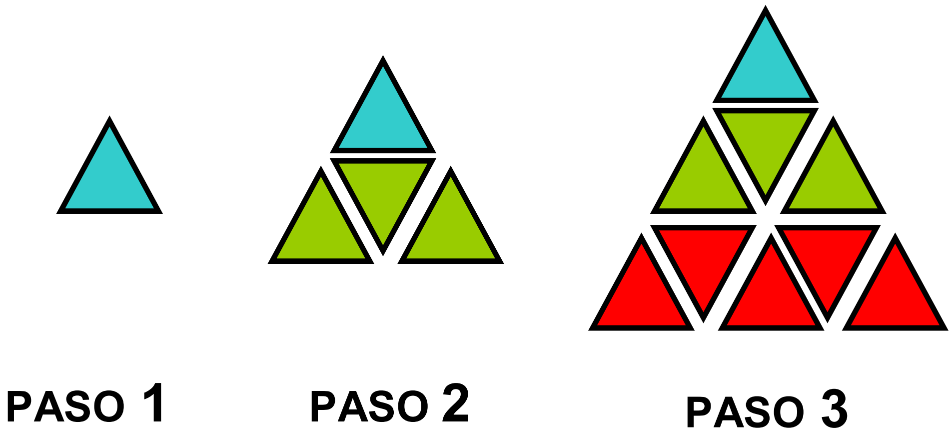
x (lugar en la lista)	y
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
x	$3x$

- Tablas que permitan al alumno encontrar fórmulas del tipo $y = mx + b$
- Métodos geométricos y algebraicos de solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Primera sesión: un reto.

Duración aproximada: 1.5 h en el salón de clases.

1. El siguiente patrón de crecimiento se construye a partir de un triángulo equilátero como paso inicial y en cada paso de crecimiento, pegando “renglones” de triángulos congruentes al primero bajo este de manera que se forme un triángulo equilátero más grande como se muestra en la figura.



Pregunta 1.- ¿Cuál es el número de triángulos congruentes al triángulo del paso 1 que hay en la figura formada en el paso 100?

Obviamente la solución aritmética que consiste en ir realizando todas las figuras contando el número de triángulos no es opción para los alumnos, tampoco lo es la solución obtenida al ir sumando todos los números impares consecutivos aunque una búsqueda de este tipo por parte de algún alumno ya muestra un grado de abstracción mayor. Por otro lado una posible solución que el profesor debe tener en mente consiste en darse cuenta de que, en el paso n, los triángulos que "miran hacia arriba" son tantos como el enésimo número triangular y los que "miran hacia abajo" son tantos como el ($n - 1$)-ésimo número triangular y que la suma de dos números triangulares consecutivos es igual a un número cuadrado, en este caso el enésimo. Sin embargo, nuestra estrategia consiste en guiar la búsqueda del alumno hacia la solución de este problema a través de ordenar la información en una tabla.

A pesar de que el alumno ya ha trabajado con tablas e incluso ha graficado los puntos obtenidos en el Plano Cartesiano, en la gran mayoría si no es que en la totalidad de los casos, aún es necesario sugerir que se construya una tabla en la cual se especifique en la primer columna el número de paso y en la segunda la cantidad de triángulos correspondiente a la figura creada en dicho paso.

Número de paso	Número de triángulos
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
. . .	. . .

Aquí es importante discutir las múltiples soluciones que proporcionan los alumnos a la

Pregunta 2: ¿Qué operaciones se podrían realizar con los números de la tabla de manera que obtengamos los números de la columna de la derecha? La pregunta es claramente ambigua pero permite que los alumnos encuentren una multitud de soluciones que permiten al grupo tomar confianza en su capacidad matemática.

Como ejemplo de algunas de las soluciones expresadas durante la clase tenemos los siguientes:

Primera solución.

El alumno va anotando las diferencias entre números consecutivos de la columna de la derecha dándose cuenta de que dichas diferencias van cambiando con una regla más sencilla que ya ha trabajado durante las sesiones de la ecuación de la recta.

Número de paso	Número de triángulos	
1	1	
2	4	3
3	9	5
4	16	7
5	25	9

Sin embargo, el profesor debe observar que, a pesar de que esta solución es adecuada para la segunda pregunta, no lo es para la primera puesto que la información que se obtiene aparece exclusivamente de datos pertenecientes a la columna derecha y la información dada en la primer pregunta está en el ámbito de la columna izquierda, a saber que el número de paso es el 100.

Segunda solución.

El alumno observa que la suma de los tres números de las celdas sombreadas produce el número encerrado en una circunferencia.

Número de paso	Número de triángulos
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
. . .	. . .

Nuevamente hay un problema para que esta solución sirva para responder a nuestra primer pregunta, para obtener el número de triángulos en el paso 100 necesitamos de tres datos para aplicar la regla: los números de pasos 99 y 100, y el número de triángulos para el paso 99 (el cual, lástima, también desconocemos). Ante esta solución el profesor debe dejar en claro que lo que realmente deseamos es obtener los números de la columna derecha utilizando únicamente números de la columna izquierda. **Esta advertencia debe ser repetida cuantas veces sea necesario durante el desarrollo de la estrategia**.

Tercera solución.

El alumno advierte que al multiplicar los números de las casillas sombreadas y restar el más pequeño de ellos se obtiene el número de triángulos correspondiente a este último.

Número de paso	Número de triángulos
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
. . .	. . .

$(4 \times 5) - 4 = 16$

Esta solución nos permite resolver la pregunta inicial ya que lo único que necesitamos para obtener el número de triángulos en el paso 100 es el propio valor 100 y el siguiente número natural, 101. Así, el número de triángulos para la figura en el paso 100 es (100)(101) - 100 = 10,000. Claro que esta solución nos proporciona mucho más de lo que habíamos buscado en un principio: el mismo método se puede aplicar a cualquier número de paso obteniéndose de inmediato su número de triángulos correspondiente. En este punto la labor de enseñanza se torna difícil, hay que convencer al estudiante que estamos frente a una fórmula matemática cuyo modelo más eficiente aparece con la careta de una ecuación algebraica; aquí el paso más problemático consiste en encontrarla y, al menos en mi experiencia, en los primeros ejemplos el profesor debe hacer la mayor parte del trabajo — si no es que todo—. Esto no significa que el profesor volteará hacia el pizarrón y escribirá con letra grande "$y = x(x+1) - x$" a la vez que afirma:

— la ecuación buscada es equis por el sucesor de equis y al resultado le sustraemos equis…

En lugar de esto, el profesor debe intentar que la solución surja dentro de la propia aula, valiéndose del trabajo realizado anteriormente al completar la tabla cuando ahora, en lugar de un número se escribe x en la primera columna. De manera natural los alumnos llenan la celda frente a x con y cuando el profesor sugiere:

— Si a la columna de la izquierda le ponemos el valor x entonces a la columna de la derecha le pondremos el valor de…

— "ye" —responde normalmente algún alumno.

Número de paso	Número de triángulos
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
. . .	. . .
x	y
?	

El verdadero problema aparece cuando se intenta completar la casilla con el signo de interrogación. Aquí el profesor nuevamente debe intentar sugerir:

— Si a tal casilla le asigné el valor x a la casilla de abajo le debo dar el valor de…

Una multitud de respuestas puede venir ahora:

— ¡”ye”!

— ¡equis!

— ¡equis cuadrada!

— ¡cinco! —grita un último alumno pensando en el ejemplo numérico que nos llevó a la solución.

El profesor debe ser paciente y completar la tabla por él mismo, ayudar a los alumnos a expresar la fórmula algebraica correctamente e, incluso, llenar algunas casillas adicionales comparando las expresiones algebraicas que ha escrito con ejemplos numéricos

Número de paso	Número de triángulos
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
. . .	. . .
$x - 1$	
x	y
$x + 1$	
$x + 2$	
$x + 3$	
. . .	

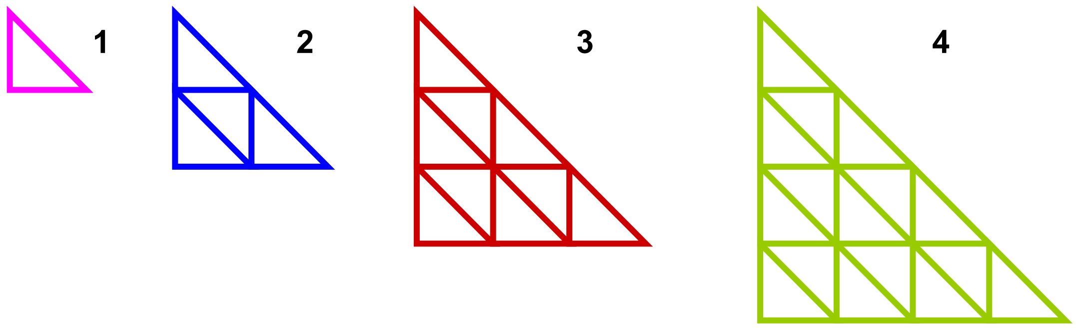
El alumno descubre que el número de la columna de la derecha es igual al de la columna izquierda multiplicado por sí mismo. En este caso la fórmula es inmediata ya sea que los alumnos la expresen como $y = x^2$ ó como $y = x(x)$.

Es útil que el profesor proporcione las dos últimas alternativas de solución en caso de que los estudiantes no hayan podido obtener alguna de ellas o las dos, así se puede comenzar a discutir la equivalencia de expresiones algebraicas como en este caso

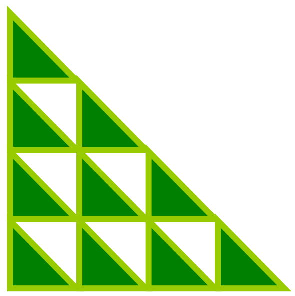
$$x^2 = x(x+1) - x$$

lo cual permite a los alumnos comenzar a manipular expresiones algebraicas, usar distributividad y neutros aditivos de una manera práctica. Finalmente se pide a los alumnos que hagan la gráfica con los puntos obtenidos pudiendo ahora dar valores negativos y racionales a “x” aunque dejando claro que para el problema propuesto sólo los valores enteros positivos dan soluciones “verdaderas”.

2.- Considere el siguiente patrón de crecimiento. Llamaremos aristas a los lados de los triángulos congruentes al triángulo inicial



¿Cuántas aristas tendrá la figura en el paso 150?
Una fórmula general puede ser descubierta si tenemos en consideración que el total de aristas corresponde a los lados de los triángulos sombreados en la siguiente figura



y, en el enésimo paso hay tantos triángulos sombreados como en el enésimo número triangular (o, equivalentemente, como el valor de la suma de los primeros n números naturales), así el número de aristas en el enésimo paso está dado por

$$3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Nuevamente esperamos encontrar tal fórmula a partir de la tabla de valores que es necesario que los alumnos realicen; aunque es obvio que lo complicado de la fórmula impedirá que los alumnos obtengan el resultado deseado, es necesario que intenten desenmarañar el problema durante al menos cinco minutos sin intervención del profesor y que, finalmente, éste, después de revisar el trabajo de cada estudiante, remarque las ideas interesantes y proporcione la respuesta correcta.
La tabla debe tener la siguiente forma:

Número de paso	Número de aristas
1	3
2	9
3	18
4	30
5	45
. . .	. . .

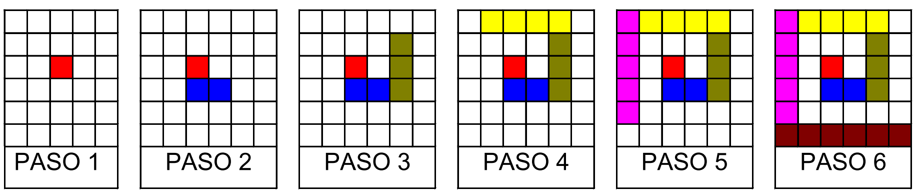
Dentro del aula una estudiante notó que para obtener los números de la derecha podía sumar todos los enteros consecutivos hasta el número de paso deseado multiplicando al final la suma por tres. Esto me permitió sugerir que podíamos simplificar los números de la tabla y, si encontrábamos una fórmula adecuada para la tabla simplificada, sólo necesitaríamos multiplicarla finalmente por tres. La tabla simplificada es la siguiente:

Número de paso	Número de aristas/3
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
. . .	. . .

De nueva cuenta pueden surgir varios intentos de solución por parte de los alumnos, sin embargo en este punto me pareció conveniente proporcionar la solución multiplicando dos de los valores consecutivos de la columna de la izquierda y dividiendo el resultado entre dos. Los alumnos corroboraron los demás casos numéricos convenciéndose de la validez de la fórmula (sin una prueba formal, claro) finalmente obtenida.

Número de paso	Número de aristas/3
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
. . .	. . .
x	y
$x+1$	

3.- En una cuadrícula se comienzan a sombrear cuadrados como se muestra en las figuras:

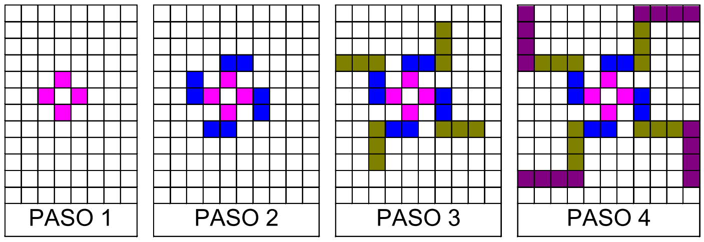


La pregunta es ¿cuántos cuadrados hay sombreados en el paso 200?
En este caso el profesor debe evitar cualquier ayuda hacia el grupo ya que ya sea que los alumnos busquen la relación adecuada numéricamente dentro de la tabla o que se den cuenta de que la tabla es idéntica a la del problema anterior, ellos poseen ya la herramienta necesaria para enfrentar el problema.

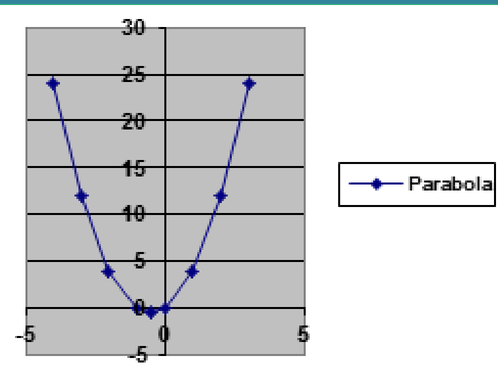
Segunda sesión: el reto se convierte en tormento.

Duración 1.5 h en el salón de clases

4.- En el siguiente patrón geométrico de crecimiento, los alumnos deben ser capaces de construir la tabla que modela el cambio en el número de cuadrados, buscar y encontrar relaciones geométricas dentro de ésta y descubrir la fórmula algebraica que relaciona el número de paso con el número de cuadrados de la figura en dicho paso.



Encontrada la ecuación pediremos adicionalmente a la clase que construya la gráfica de la ecuación que se ha obtenido, dando ahora valores negativos y racionales a la columna de la izquierda con objeto de obtener una gráfica más completa.

x	*y = 2x (x + 1)*	*Gráfica*
- 2	4	
- 1	0	
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
0	0	
1	4	
2	12	
3	24	
4	40	
5	65	

Al observar la curva que se obtiene al hacer la gráfica de la ecuación (parábola), se puede hacer mención de dos hechos que saltan a la vista:

- La parábola es una curva que es simétrica con respecto a una recta (vertical en este caso) lo cual es intuitivamente claro al observar que los valores en la columna y parecen repetirse por parejas y también al realizar la gráfica.

- Hay un punto cuya coordenada y no tiene pareja, por este punto corta el eje de simetría de la parábola a esta curva. Dicho punto es llamado el vértice de la parábola y es el punto en el que el valor de la coordenada y es el mínimo entre todos los valores y de puntos sobre la parábola. En los problemas subsecuentes emplearemos una gran cantidad de energía para encontrar las coordenadas de dicho punto para cada ecuación cuadrática que encontremos.

En el presente ejemplo debemos hacer notar a los alumnos que si encontramos dos puntos cuya coordenada y es idéntica, entonces la coordenada x del vértice de la parábola debe encontrarse exactamente a la mitad entre las coordenadas x de aquellos dos puntos (esto como consecuencia de que la parábola es simétrica y el eje de simetría pasa por el vértice de la parábola). Así la coordenada x del vértice es $-\frac{1}{2}$ y basta sustituir este valor en la ecuación para obtener $y=-\frac{1}{2}$.

5.- La Tabla de Multiplicar.

Cuando menciono a los alumnos que el siguiente ejemplo que veremos será la Tabla de Multiplicar y la comienzo a escribir en el pizarrón, debo en principio aguantar algunas bromas acerca de la dificultad del tema y no falta el estudiante que me "ayuda" a completar la tabla cantando alguna o algunas de las tablas.

Sin embargo inmediatamente se les borra la sonrisa cuando yo mismo sonrío mientras les expreso que, desgraciadamente, no leeremos la tabla en la forma usual sino que la leeremos diagonalmente.

1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	**6**	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	**12**	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	**20**	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	**30**	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	**42**	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	**56**	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	**72**	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	**90**

Con los números sombreados podemos realizar una nueva tabla: el primero es el 2; el segundo, el 6; el tercero, el 12 y así sucesivamente. Así la pregunta es ¿qué número aparecerá en el sexagésimo lugar de esta nueva tabla? además de que se tiene que encontrar el vértice de la parábola que aparecerá como gráfica de la ecuación.

Aquí, la ecuación cuadrática es $y=x(x+1)$ y deseamos encontrar dos valores distintos de x para los cuales la coordenada y tenga el mismo valor, de esta manera el vértice tendrá como coordenada x el punto medio de aquellos dos valores distintos. Sin embargo en la tabla no hay dos valores en la columna derecha que se repitan. Por otro lado, teniendo en cuenta que la ecuación está escrita en forma de un producto podemos hacer ver a los estudiantes que $y=0$ es un valor adecuado para buscar las x´s correspondientes ya que para que un producto de dos números sea cero, debemos tener que alguno de los dos factores sea cero. De esta manera para encontrar los valores de x que producen $y=0$, o, equivalentemente, para resolver la ecuación cuadrática $0=x(x+1)$ tenemos dos casos:

- Primero, que sea el primer factor el que valga cero $x=0$ en cuyo caso tenemos el punto (0,0) como primera solución de la intersección de la parábola con la recta $y=0$ (el eje x).

- Segundo, que el que produzca el valor de cero en y sea el segundo factor $x+1=0$ de donde, despejando la incógnita "x" tenemos $x=-1$, de manera que en este caso obtenemos al punto (-1, 0) como la segunda solución para la intersección de la recta $y=0$ y la parábola.

Finalmente, para encontrar el vértice de la parábola, su coordenada en x debe encontrarse exactamente a la mitad entre las soluciones halladas anteriormente, a saber $x=0$ y x = -1, es decir $x=-\frac{1}{2}$. Para encontrar el valor de la coordenada y del vértice se utiliza la ecuación $y=x(x+1)$ sustituyendo x por el valor encontrado $-\frac{1}{2}$, lo cual produce $y=-\frac{1}{2}$. De esta manera el vértice de la parábola es el punto $V=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Ejercicios

Durante el resto de la sesión se pide a los alumnos que encuentren las ecuaciones y los vértices de la parábola que resultan al graficarlas, utilizando las siguientes tablas (que resultan de tomar valores en diagonales dentro de la Tabla de Multiplicar):

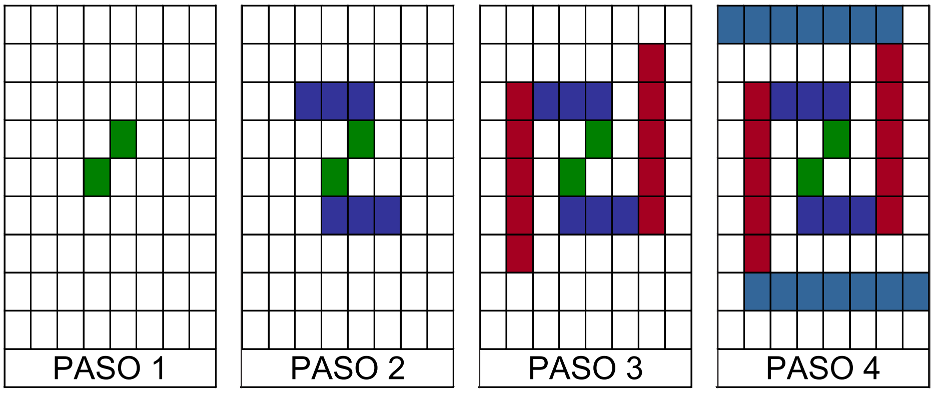
x	y	x	y	x	y
1	3	1	4	1	6
2	8	2	10	2	14
3	15	3	18	3	24
4	24	4	28	4	36
5	35	5	40	5	50
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Tercera sesión. Viendo el panorama completo.

Duración 1 h en el salón de clases

En ocasiones tantos árboles impiden admirar al bosque. El propósito de la tercer sesión es permitir a los alumnos observar el trabajo que han realizado durante las dos primeras sesiones ahora sin que ellos necesiten mancharse las manos; debemos intentar mostrarles que el realizar una tabla que ordene los datos obtenidos, hacer hallazgos aritméticos dentro de ésta, descubrir la fórmula algebraica que describe en general estos hallazgos, graficar la función cuadrática descubierta, encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática obtenida al igualar la función a cero y obtener las coordenadas del vértice de la parábola forman un todo. Los alumnos han realizado todos estos pasos con algún éxito, sin embargo es necesario amalgamarlos para que no se queden con la impresión de que han resuelto varios problemas sin conexión alguna. En esta sesión el profesor es quien realiza todos los pasos explicando cada uno de ellos pero enfatizando la necesidad de realizarlos para poder acceder al siguiente.

6.- El siguiente patrón geométrico de crecimiento puede ser modelado con una función cuadrática. Encuentre las coordenadas del vértice de la parábola obtenida al graficar dicha ecuación.



La tabla es de la siguiente forma

Número de paso	Número de cuadrados
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50
. . .	. . .

Observando que el número de cuadrados es múltiplo de dos (lo cual es geométricamente claro puesto que la figura se escinde en dos ramas) podemos anexar una columna más a la tabla dividiendo cada uno de los valores de la columna de la derecha entre dos.

Número de paso	Mitad de No. de cuadrados	Número de cuadrados
1	1	2
2	4	8
3	9	18
4	16	32
5	25	50
. . .	. . .	. . .

La columna de en medio se obtiene a partir de la columna de la izquierda simplemente elevando al cuadrado los valores de esta última. Así, para obtener una fórmula tenemos:

Número de paso	Mitad de No. de cuadrados	Número de cuadrados
. . .	. . .	. . .
x	x^2	$2x^2$
. . .	. . .	. . .

De donde la fórmula algebraica que describe el crecimiento de los patrones geométricos es

$$y = 2x^2$$

Para encontrar los valores de x para los cuales la parábola intersecta al eje X, hacemos

$0 = 2x^2$ o, equivalentemente, $0 = (2x)(x)$

Expresado ya como un producto, tenemos dos posibles casos para obtener cero:

- $0 = 2x$, de donde $x = 0/2 = 0$
- $x = 0$

Obteniendo en ambos casos el valor x = 0. Esto significa que x = 0 es el **único** valor para el cual y = 0, de aquí que el punto (0,0) sea el vértice de la parábola.

7. La siguiente tabla aparece dentro de la Tabla de Multiplicar como una de las diagonales. Encuentre el vértice de la parábola que se obtiene al graficar la función cuadrática que modela la tabla.

Número de paso	Número de cuadrados
1	9
2	20
3	33
4	48
5	65
6	84
7	105
8	128
9	153
10	180

Observemos que para obtener el valor sombreado de la columna derecha, debemos multiplicar los valores sombreados en la columna izquierda. Para obtener la fórmula, repetimos el mismo patrón de sombreado con las siguientes expresiones algebraicas

Número de paso	Número de cuadrados
$x - 1$	
x	y
$x + 1$	
$x + 2$	
$x + 3$	
$x + 4$	
$x + 5$	
$x + 6$	
$x + 7$	
$x + 8$	

De esta manera, la función cuadrática deseada es

$$y = x(x+8)$$

Vista de esta manera la ecuación no parece tan cuadrática para el alumno pero podemos comenzar a realizar algunas operaciones algebraicas sencillas como aplicar la distributividad:

$$y = x^2 + 8x$$

Sin embargo para nuestro propósito de resolver la ecuación cuadrática

$$0 = x^2 + 8x$$

la primer formulación es más adecuada pues expresa al cero como un producto y ya vimos que esto se resuelve considerando cada factor igual a cero y resolviendo para x. Sin embargo tratar de solucionar esta última ecuación nos permite comenzar a introducir el concepto de factorización para obtener

$$0 = x(x+8)$$

cuyos ceros son $x = 0$ y $x = -8$. De esta manera el vértice de la parábola tiene coordenada $x = -4$. Sustituyendo este valor en la fórmula obtenemos

$$y = (-4)^2 + 8(-4)$$

$$y = 16 - 32$$

$$y = -16$$

Así, el vértice de la parábola tiene coordenadas $(-4, -16)$.

Finalmente, durante esta sesión se imparten dos temas relacionados al trabajo previamente realizado, a saber, la factorización de términos comunes y solución de ecuaciones cuadráticas sencillas como por ejemplo

- $x^2 = 25$
- $(x - 2)^2 = 49$
- $(x + 4)^2 = 16$
- $x^2 + 5x = 0$

Cuarta sesión. Las bondades del método coercitivo.

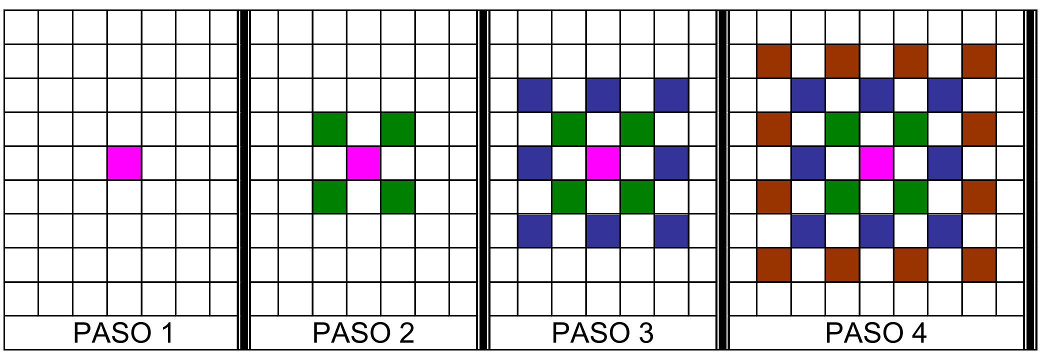
Duración: 1.5 h

La cuarta sesión consiste en un examen. El objetivo de aplicar este instrumento no tiene que ver realmente con la coerción. Hay dos metas que se pretenden alcanzar al realizarlo:

- Primero, que el alumno se rasque con sus propias uñas; finalmente cuando el estudiante esté en la Universidad o en su centro de trabajo, no contará con un profesor de planta que le esté resolviendo sus problemas. Muchos de nuestros estudiantes abusan del sistema de asesorías esperando que sean los profesores quienes les vayan resolviendo los ejercicios que se les han pedido realizar. He escuchado a multitud de estudiantes —incluso en examen— pidiendo que el profesor haga un ejercicio parecido al que se les ha planteado y, ante la negativa de este último, contestan indignados: ¿Cómo espera que realice el ejercicio si usted no me explica cómo hacerlo? Esto ocurre aun cuando el profesor haya destinado cinco clases al tema de las cuales el alumno no asistió a tres.
- Segundo, que el alumno tome conciencia de cuáles son las dudas que tiene o los procedimientos que no ha aprendido con claridad. Durante el examen varios de los alumnos se dieron cuenta de que no podían obtener el vértice de la parábola, de manera que en la quinta sesión pusieron especial atención en este punto, realizando además preguntas que no se habían atrevido a hacer con anterioridad o que no se les habían ocurrido.

Examen

1. Haga una tabla, grafique y encuentre la ecuación que rige el siguiente patrón de crecimiento de cuadritos sombreados:



Ayuda: Quizás sea más fácil si, en la tabla, a la columna de la derecha se le resta uno en cada paso.

2. Encuentre la ecuación cuadrática que modela los valores de las siguientes tablas; grafique la parábola y encuentre su vértice.

x	y	x	y
1	3	1	4
2	8	2	10
3	15	3	18
4	24	4	28
5	35	5	40
6	48	6	54

3. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas

a) $x^2 + 7x = 0$ b) $x^2 - 3x = 0$ c) $(x - 7)^2 = 25$

4. Factorice las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x^2y^3z^4 - 3xy^4z^2$ b) $4x^2yz^3 -2xy^2z^4$ c) $3xyz^3 + 2xz^2$

Quinta sesión. La atención crece.

Duración: 1.5 h en el salón de clases

Durante la quinta sesión el profesor realiza un último ejemplo a partir de una tabla mientras los alumnos preguntan las dudas que surgieron durante el examen. Finalmente, se les proporciona una serie de ejercicios del estilo siguiente:

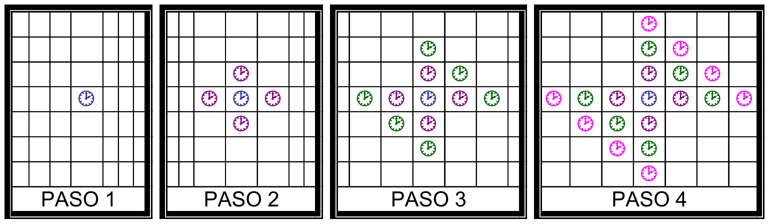
Cada una de las siguientes tablas es modelada por una función cuadrática. Grafíquela y encuentre el vértice de la parábola.

x	y	x	y	x	y	x	y
1	0	1	0	1	- 2	1	0
2	2	2	3	2	0	2	1
3	6	3	8	3	4	3	4
4	12	4	15	4	10	4	9
5	20	5	24	5	18	5	16
6	30	6	35	6	28	6	25

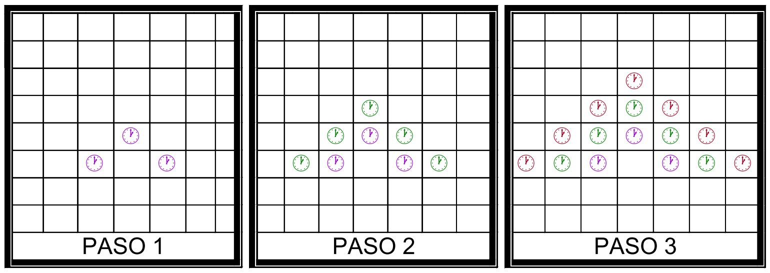
Ejercicios para asesoría

Una de las mayores fortalezas del Modelo Educativo implementado por el Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal es el espacio de asesoría. Este espacio permite al alumno clarificar dudas, superar miedos e incluso —aunque no muy recomendable— recibir clases particulares. Por otro lado, el profesor puede evaluar el desempeño y avances de cada alumno de manera personalizada y mucho más objetiva que a través de un simple examen. En el caso de la estrategia que nos ocupa es importante tener a la mano una serie de ejercicios para realizar durante la asesoría.

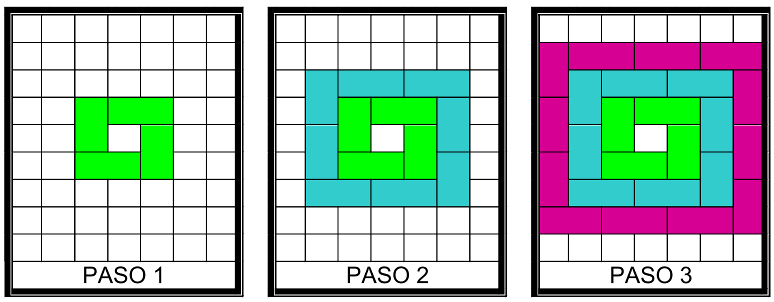
1. ("Moñito") Encontrar la función cuadrática que modela el siguiente patrón de crecimiento, graficarla y encontrar el punto en el que se alcanza el valor mínimo (vértice)



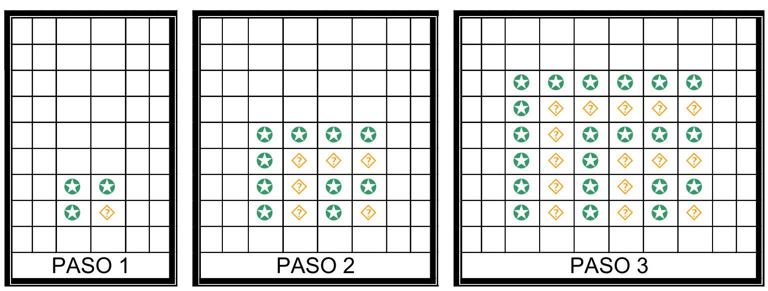
1. ("El éxodo de los bichos") Encontrar la función cuadrática que modela el siguiente patrón de crecimiento, graficarla y encontrar el punto en el que se alcanza el valor mínimo (vértice)



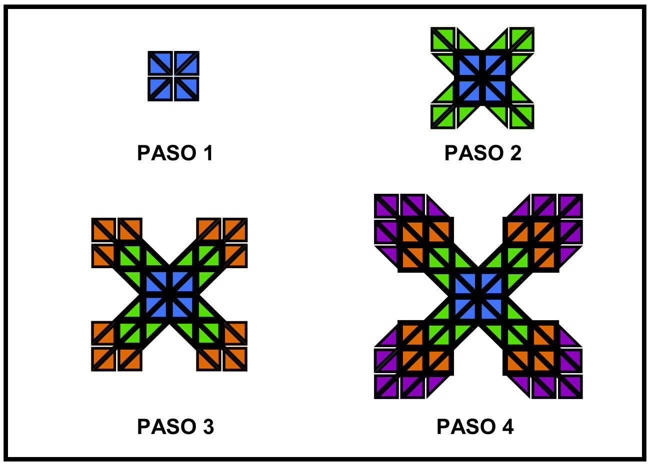
3. ("Marco de fotografía") Encontrar la función cuadrática que modela el siguiente patrón de crecimiento, graficarla y encontrar el punto en el que se alcanza el valor mínimo (vértice)



4. ("Pecera radiactiva") En cada generación de peces en una pecera radiactiva aparecen cada vez más peces mutantes (◇). Encontrar la función cuadrática que modela el siguiente patrón de crecimiento de los peces mutantes, graficarla y encontrar el punto en el que se alcanza el valor mínimo (vértice)



5. (“Aspas de molino”) Encontrar la función cuadrática que modela el siguiente patrón de crecimiento (número de triángulos), graficarla y encontrar el punto en el que se alcanza el valor mínimo (vértice)



Evaluación

Hay diversas competencias que deseamos haber fomentado en el estudiante durante el desarrollo de la presente estrategia. Obviamente la ambigüedad de los enunciados de las competencias producirá que nuestros criterios para evaluar si un alumno es competente o no sean bastante subjetivos. Por ejemplo, para la competencia “Conoce la relación entre la Geometría y el Álgebra” sabemos que en la actualidad estas dos áreas siguen creciendo y mucho más sus interrelaciones, por lo que no existe ser humano que “conozca la relación entre la Geometría y el Álgebra”. Así que cuando menciono que se inculcó en el estudiante cierta competencia, lo que quiero decir es que el alumno ha alcanzado un cierto grado de competencia, que le permitirá acceder de manera fluida a temas más avanzados utilizando la herramienta matemática obtenida.
Las competencias a desarrollar a través de la presente estrategia son:

- **“Plantea y resuelve problemas haciendo uso del lenguaje algebraico y argumenta su razonamiento en forma oral y escrita”.**
  Obviamente esta estrategia no comprende completamente a esta competencia, falta, por ejemplo, dado el enunciado de un problema del “mundo real”, que el alumno pueda encontrar la ecuación cuadrática que permite resolverlo y pueda resolverla. Sin embargo ya podemos evaluar el que, a partir de un problema aritmético, pueda utilizar el lenguaje algebraico como un atajo para resolverlo. Por otro lado podemos evaluar la expresión tanto oral como escrita de los razonamientos aritméticos que, a partir de los primeros valores de la tabla, permiten al estudiante arribar a una fórmula algebraica que condense estos valores. Los criterios involucrados aquí para esta evaluación son corroborar que el alumno propone soluciones a los problemas matemáticos argumentando sus razonamientos e identifica soluciones a los problemas planteados haciendo uso del lenguaje matemático.

- **“Utiliza el concepto de función para modelar fenómenos diversos”.**
  El alumno, a través de esta estrategia, debe madurar su concepto de función de manera intuitiva y la evaluación de esta competencia consiste en comprobar que el alumno ha tomado conciencia de que el cambio en los valores de x produce cambios en los valores de y, además de que debe ser capaz de encontrar el valor de y dado un determinado valor de x. Por ejemplo, hay estudiantes que al encontrar la coordenada x del vértice de la parábola creen que ya encontraron el vértice y cuando se les pide que encuentren la coordenada y del mismo no aciertan a darse cuenta que deben sustituir el valor x obtenido en la fórmula que acaban de encontrar (función cuadrática).

- **“Utiliza el concepto de función en el planteamiento y resolución de problemas”.**
  Nuevamente la estrategia no abarca por completo la presente competencia, sin embargo, los criterios para comenzar a evaluar esta competencia son comprobar que el alumno resuelve la ecuación cuadrática que aparece cuando buscamos dos puntos cuya coordenada $y = 0$ y que encuentre el máximo o mínimo de la función cuadrática (vértice de la parábola).

Bibliografía

- Alonso, Fernando et al, (1993), *Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra*, 1a. edición, Madrid, Ed. Síntesis.
- Conway, John y Guy, Richard, (1996), *The Book of Numbers*, 1st. edition, Nueva York, Ed. Springer Verlag New York.
- Kanga, Adi, (1995), *Number Mosaics*. Journeys in Search of Universals, 1st. edition, Singapour, Ed. World Scientific Publishing.
- Martínez, Fernando, (2002), *Ternas Pitagóricas en Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza*, México, Distrito Federal, Sociedad Matemática Mexicana. (por publicar).
- Padilla, Gualberto, (2006), *Conteo y Divisibilidad* en *Cuadernos de Apoyo a la Docencia*, enero de 2006, México, D.F., Sistema de Bachillerato del Gobierno del Distrito Federal.

Funciones, ecuaciones cuadráticas y cónicas.

Adrián Vázquez Márquez

Introducción

La estrategia que se desarrolla a continuación se debe principalmente a dos cosas, la primera es que para el alumno es difícil asociar lugares geométricos con ecuaciones y viceversa, no obstante que puede interpretar cada una por su lado, esta dificultad surge de la falta de visión para considerar una interacción entre la Geometría y el Álgebra, al considerarlos como entes separados.

Por otro lado, en los libros de texto, a través de su caracterización, se hace mención a la parábola sólo como un objeto geométrico. Pero esta nunca se dibuja o se construye, en el mejor de los casos se menciona cómo se puede obtener con lápiz y papel, o con algún instrumento de madera, pero no se menciona cómo se puede obtener con regla, escuadras y compás.

El objetivo de esta estrategia es precisamente enseñar cómo obtener las secciones cónicas, con los instrumentos antes mencionados, además de que reforzará en el alumno sus conocimientos de Geometría.

Caracterización:

- La estrategia corresponde a la primer caracterización del objetivo 4 de Matemáticas III, a saber, el alumno relaciona la ecuación con la gráfica de una función cuadrática.
- El material necesario para esta estrategia es el siguiente: un par de escuadras, regla y compás, de parte del profesor y del alumno.
- El tiempo necesario para realizar la estrategia así como su respectiva evaluación es de cuatro clases de 1.5 horas.
- Los resultados y la evaluación de la estrategia se explican hacia el final del desarrollo.
- El conocimiento previo que debe tener el alumno es sobre geometría elemental y nociones básicas de geometría analítica.

Desarrollo

PARTE I[1]

Se comienza la clase proponiendo como una introducción la caracterización geométrica de la paralela a una recta dada y de la circunferencia.

1. ¿Cuáles son todos los puntos en el espacio cuya distancia a una recta dada, denotada como D, es constante, digamos 30 centímetros[2]?

Primer paso, tómese un punto en el plano, llamémosle P_1, y midamos su distancia a la recta D, si esta es de 30 cm entonces mencionamos que pertenece al conjunto geométrico requerido, si no, lo tachamos (Figura 1) y extendemos en caso necesario la recta perpendicular y obtenemos un punto P_2 sobre esta perpendicular que diste de D en 30 cm.

Después procedemos a dibujar otro punto arbitrario, siempre sobre un mismo lado de la recta para no confundir innecesariamente al alumno, llamémosle ahora a este punto P_3, medimos su distancia, si esta última es de 30 cm se menciona que el punto pertenece al conjunto que se quiere caracterizar. Si la distancia no es de 30 cm la tachamos, (véase Figura 1) y procedemos a extender, en caso necesario, la recta perpendicular para obtener el punto P_4 que diste de la recta en 30 cm.

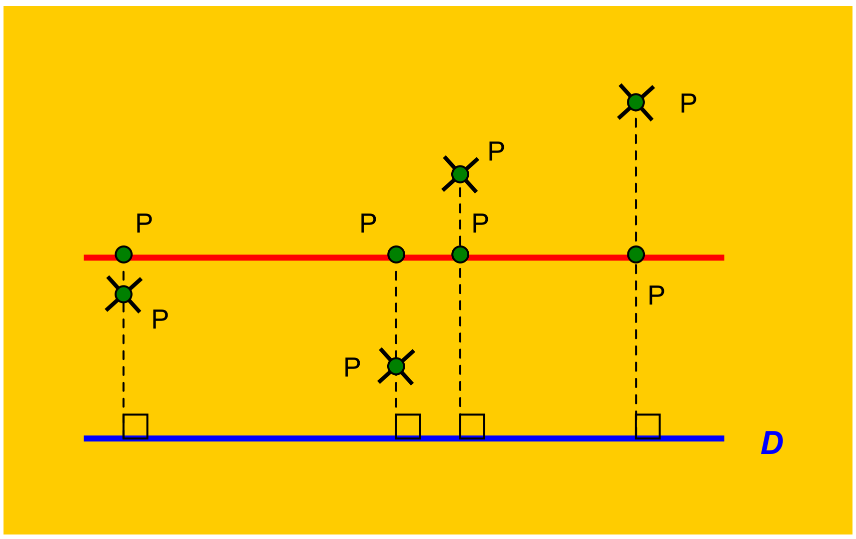


Figura 1.

Se procede de la misma manera con un tercer par de puntos y con un cuarto par hasta que el objeto geométrico se perfile. Se necesita que el par de puntos esté espaciado para que podamos mencionar que el conjunto de puntos que se está perfilando es el que coincide con la recta paralela.

1 Esta parte corresponde con la primera hora y media del tiempo requerido.

2 La anterior se considera una medida adecuada a las dimensiones del pizarrón.

Entonces se termina esta parte mencionando a los alumnos que el conjunto que se buscaba era el de la recta paralela a una distancia de 30 cm de la recta D y se dibuja ésta.

2. Después se propone encontrar el conjunto de puntos cuya distancia a un punto fijo llamado f es constante, digamos que 40 centímetros.

Se responde el requerimiento pintando un punto en el pizarrón nombrándolo f y dibujando un punto arbitrario en el plano llamado P_1, véase Figura 2; trazamos el rayo de este punto a f, si su distancia a f es de 40 cm pertenecerá al conjunto, pero si no, lo tachamos y sobre el mismo rayo buscamos un punto que sí cumpla el requerimiento, a tal punto lo llamamos P_2, véase también la Figura 2. Nuestro proceder será el mismo hasta dibujar por lo menos cuatro pares de puntos, de tal forma que el conjunto a dibujar se vaya perfilando.

El objetivo de dibujar la circunferencia de esta manera es para darle continuidad al procedimiento. Se completa el objeto geométrico dibujando la circunferencia y se debe enfatizar que con el compás se puede obtener la circunferencia de manera más automática y desde el principio

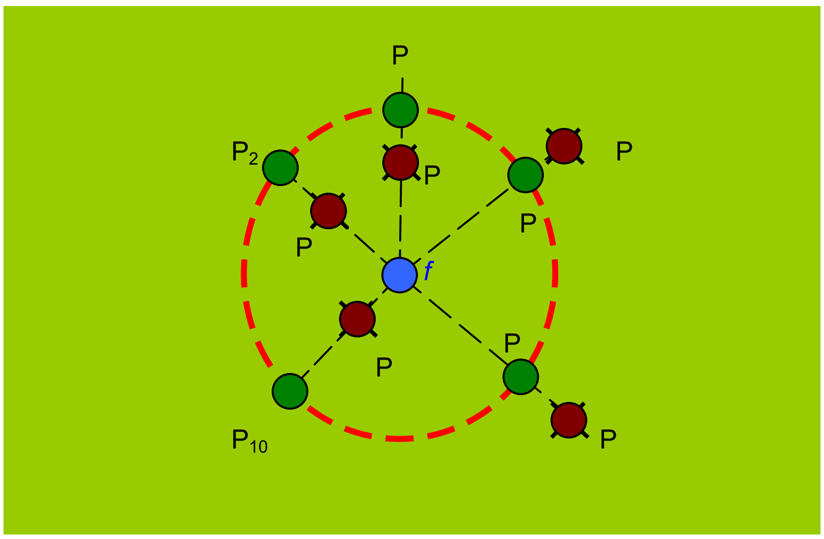


Figura 2.

3. Se plantea el siguiente problema geométrico:

¿Cuáles son todos los puntos en el plano, cuya distancia a un punto y a una recta dados son iguales? En subsiguiente, al punto dado se denotará como f y a la recta dada como D.

Para encontrar tal objeto geométrico, se puede construir o simplemente recordar que todos los puntos que distan de una recta dada, l, en 20 cm es una recta paralela a la primera con uno de sus puntos, y por lo tanto todos, con distancia de 20 cm a l. Y también se puede construir o recordar que todos los puntos que distan de un punto a en 35 cm, es precisamente el círculo de radio 35cm.

Por otro lado, y continuando con la construcción, se hace hincapié en que la distancia en el objeto geométrico que se busca es arbitraria, por lo que se propone abordar el problema de la siguiente forma:

Dada una distancia fija d se buscan los puntos que cumplen con el requerimiento con esa distancia, es decir, se buscan esos puntos sobre una paralela a D con distancia d, y sobre una circunferencia con centro f y radio d; y lo mismo se hace para varias distancias, hasta perfilar el objeto geométrico y de aquí extrapolar el procedimiento para dibujar el objeto buscado. Se utiliza una tabla como la siguiente para lograr el objetivo:

Distancia en cm	Puntos encontrados
6	No hay
12	V
18	P_1 , P_2
24	C , C'
30	P_3 , P_4
36	P_5 , P_6

El objeto perfilado es:

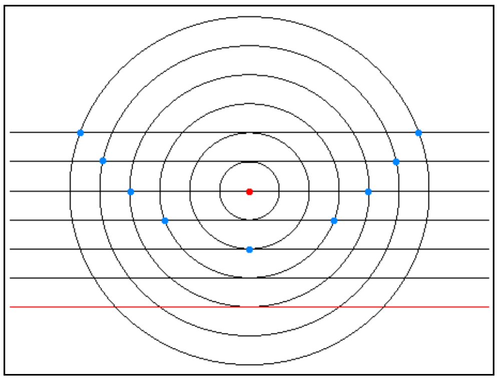


Figura 3.

Extrapolando el procedimiento, y prescindiendo de las construcciones auxiliares, se obtiene la parábola:

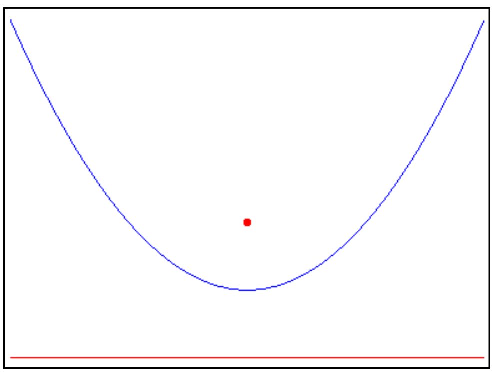


Figura 4.

Se procede a definir el vértice, la directriz, el foco, el parámetro de la parábola y el *latus rectum*. También se habla sobre la simetría de la parábola y el eje de simetría. Una vez que se establecen las propiedades de simetría de la parábola, se procede a sumergir ésta en el plano cartesiano, haciendo coincidir el eje de simetría con el eje de las ordenadas y el vértice con el origen del plano cartesiano. Y se obtiene la ecuación de la parábola con métodos convencionales.

PARTE II[3]

Esta parte corresponde con la evaluación de la estrategia y se pide con anticipación a los alumnos que lleven juego de escuadras, regla y compás.

La actividad en esta parte corre a cargo de los alumnos y se les pide que dibujen una parábola, dándoles una hoja en donde aparezca un foco, una directriz dada, a una distancia de 4 cm de aquél y una tabla con dos columnas como la que se usó en la primera parte con las siguientes distancias: 2, 4, 6, 8 y 10; se pide que encuentren los puntos de la parábola que corresponden con esas distancias. El profesor auxilia en todo momento a los alumnos.

PARTE III[4]

En esta tercera y última parte se procede a hacer la relación de este objeto geométrico con la gráfica de una función cuadrática, mediante el procedimiento clásico en geometría analítica, es decir, se encuentra la ecuación $y = x^2/4a$. El procedimiento mencionado se pude encontrar en cualquier libro de geometría analítica.

La siguiente actividad sobre la parábola, y más en específico, sobre la ecuación de ésta, es llenar una tabla como la siguiente:

$y = \dfrac{1}{4a}x^2$	
Foco	$(0, a)$
Directriz	$y = -a$
Vértice	$(0,0)$
Eje de simetría	$x = 0$
C	$(-2a, a)$
C’	$(2a, a)$
Latus rectum	$4a$

Y graficar la respectiva parábola. Entonces dado un problema sobre parábolas, por ejemplo, si se tiene el foco y la directriz, se capacita al alumno el llenado de la tabla con los datos de éste problema y se les indica que solo se tiene que especificar al parámetro a de la parábola para llenar la tabla completamente.

3 Esta parte corresponde con la segunda hora y media del tiempo requerido.

4 Esta parte corresponde con las últimas tres horas del tiempo especificado.

El siguiente paso es sumergir a la parábola pero con su abertura hacia abajo, y el resto es *mutatis mutandis*.

Se puede hacer una recapitulación en clase, sobre cómo cambia la ecuación de la parábola dependiendo de cómo se sumerge a ésta en el plano cartesiano. La anterior recapitulación se puede realizar con la ayuda de acetatos; un acetato consistiendo de la parábola solamente y otro con los ejes coordenados, entonces se coloca a la parábola con la abertura hacia arriba sobre el acetato de ejes coordenados y se da la ecuación, después se le coloca a ésta con la abertura hacia abajo sobre el acetato de ejes coordenados y se da la ecuación.

Se continúa la discusión con la colocación de la parábola sobre el otro acetato pero ahora el eje de simetría de la parábola ya no coincide con el eje de las ordenadas y su vértice ahora está sobre el punto (h, k). Dado lo anterior, se prevé que la ecuación de la parábola va cambiar, obteniéndose la siguiente:

$$y-k=\frac{1}{4a}(x-h)^2$$

Se llena una tabla como la anterior, obteniendo:

$y-k=\frac{1}{4a}(x-h)^2$	
Foco	$(0, h+a)$
Directriz	$y=k-a$
Vértice	(h,k)
Eje de simetría	$x=h$
C	$(h-2a, k+a)$
C’	$(h+2a, k+a)$
Latus rectum	$4a$

Para graficar una ecuación cuadrática arbitraria, se necesita en este punto desarrollar la complementación de cuadrados para llevar a una ecuación cuadrática general del tipo:

$$y=a'x^2+b'x+c'$$

a la adecuada para graficar y llenar la tabla correspondiente, y ahora no sólo con el parámetro a, sino que además hay que encontrar h y k.

En este momento se tiene la herramienta necesaria para encontrar la solución a una ecuación cuadrática. En el curso de Matemáticas I, se resolvieron ecuaciones lineales con una incógnita y, en hasta lo que va del curso, se resolvieron ecuaciones lineales con dos incógnitas, es decir, se complicó la ecuación a resolver; por otro lado, se puede complicar a las ecuaciones lineales considerando un término cuadrado en x. Y se procede a explicar qué relación existe entre las raíces de una ecuación cuadrática y los puntos en los cuales la parábola corta al eje de las abscisas.

En este momento se tiene la complementación de cuadrados y se puede desarrollar la resolución de una ecuación de este tipo con la obtención de la fórmula general. Y se termina de esta forma la resolución y graficación de ecuaciones cuadráticas.

Conclusiones

Se observó que los alumnos durante la primera parte de la estrategia no entendían de manera satisfactoria el objetivo de la construcción sólo hasta que se perfilaba la parábola. Al parecer la construcción se muestra un poco complicada pero sólo hasta cuando le ven un objetivo preciso que es el de construir la parábola.

El objetivo de incluir la segunda parte de la estrategia se debe a que el alumno puede hacer suyo el procedimiento de construcción de la parábola, porque se podría omitir esta parte y evaluar mediante una tarea que incluya como uno de los ejercicios la construcción de la parábola. Sin embargo el hacer la parábola en clase tiene además la ventaja de que el alumno pregunta en clase si no entendió el procedimiento.

La construcción de la parábola no tiene mucho sentido para el alumno durante la primera y la segunda parte de la estrategia, pero en la tercera toma conciencia de que cuenta con más elementos para obtener la ecuación de la parábola y le da un sentido posterior a su construcción.

Apéndice. Secciones cónicas

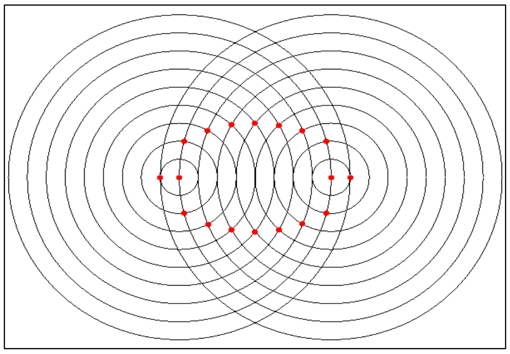
Las estrategias para la introducción a este tema son variadas y no se da aquí estrategia adicional, pero si se realiza una extensión de la estrategia para parábolas a elipses e hipérbolas.

Para construir la elipse se realiza la siguiente pregunta:
¿Cuáles son todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos dados, es constante?

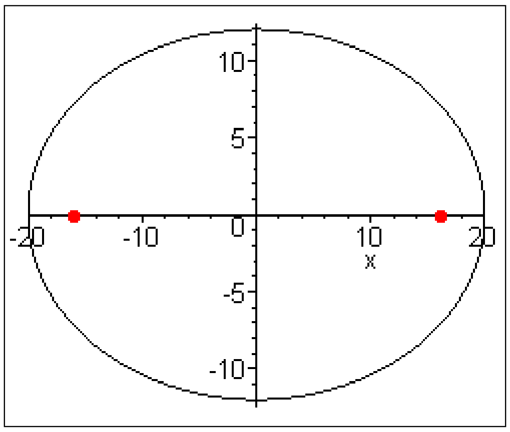
Se dan dos puntos, $\mathbf{f_1}$ y $\mathbf{f_2}$, cuya distancia entre ellos sea de 32 cm, y la distancia constante de 40 cm. Si se toma una circunferencia de 4 cm de radio con centro $\mathbf{f_1}$, se tomará también una circunferencia de radio 36 cm con centro f_2, de esta forma si se intersectan estas dos circunferencias en algún punto, éste pertenecerá a la elipse. Se aumenta entonces el radio de la circunferencia de centro $\mathbf{f_1}$ hasta llegar a la distancia de 36 cm, después de la cual no habrá puntos de elipse que buscar. El procedimiento se muestra en la siguiente tabla:

Radio de la circunferencia con centro f_1	Radio de la circunferencia con centro f_2	Puntos encontrados
4	36	V_1
8	32	P_1, P_2
12	28	P_3, P_4
16	24	P_5, P_6
20	20	P_7, P_8
24	16	P_{10}, P_{11}
28	12	P_{12}, P_{13}
32	8	P_{14}, P_{15}
36	4	V_2

El objeto perfilado es:



Extrapolando el procedimiento, y prescindiendo de las construcciones auxiliares, se obtiene la elipse siguiente:



Se procede a definir a los vértices de la elipse, los focos, y el *latus rectum*. También se habla sobre la simetría de la elipse y sus ejes de simetría. Una vez que se establecen las propiedades de simetría de la elipse, se procede a sumergir ésta en el plano cartesiano, haciendo coincidir los ejes de simetría con los ejes coordenados y el centro de la elipse con el origen del plano cartesiano. Y se obtiene la ecuación de la parábola con métodos convencionales.
La siguiente estrategia sobre la elipse, y más en específico, sobre la ecuación de ésta, es llenar una tabla como la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Focos	(0,-c),(0,c)
Distancia	2ª
Vértices	(-a,0),(a,0)
Simetrías	$x=0$, $y=0$, (0,0)
Latus rectum	$\frac{2b^2}{a}$
Relación de parámetros	$a^2=b^2+c^2$

Y se grafica además la elipse correspondiente. Entonces dado un problema sobre elipses, por ejemplo, si se tienen los focos y la distancia, se capacita al alumno para el llenado de la tabla y la graficación correspondiente, y se les indica que solo se tienen que especificar a los parámetros a, b, c de la elipse para llenar la tabla completamente. La estrategia para la hipérbola es un *mutatis mutandis* de las estrategias respectivas para la parábola y la elipse.

Cónicas: una presentación con Esferas de Dandelin

Maricela Esperanza Alonso Quiroz
Luz Arely Carrillo Olivera

Introducción

Presentar las cónicas a través del enfoque de las esferas de Dandelin durante el curso de Matemáticas III permite fortalecer el aspecto geométrico que ya fue introducido durante el curso de Matemáticas I; sin embargo, en el curso de primer semestre la habilidad de visualización espacial no se desarrolla, lo cual resulta evidente cuando se pide al estudiante en el segundo curso de Matemáticas encontrar la magnitud de la diagonal de un paralelepípedo utilizando el Teorema de Pitágoras y aquél no es capaz de imaginársela. Así, este aspecto (la visualización espacial) poco atendido dentro de nuestro bachillerato se fomenta durante el desarrollo de la presente estrategia.

Por otro lado, este ejercicio de razonamiento y visualización espacial con esferas de Dandelin está muy ligado a la estrategia de realizar los cortes al cono (secciones cónicas) utilizando planos con distintas inclinaciones. En ocasiones esta última estrategia es seguida de la obtención de las ecuaciones cartesianas de las cónicas y, normalmente, el estudiante no entiende la relación que existe entre cortar un cono de plastilina y un mar de ecuaciones y transformaciones de las mismas que llevan a las distintas ecuaciones de las cónicas.

En cambio, a través de esta estrategia es muy importante conocer a fondo la definición de la elipse para poder seguir los argumentos dados, esto permite que dicha definición no le cause confusión al estudiante ya en el terreno del plano cartesiano.

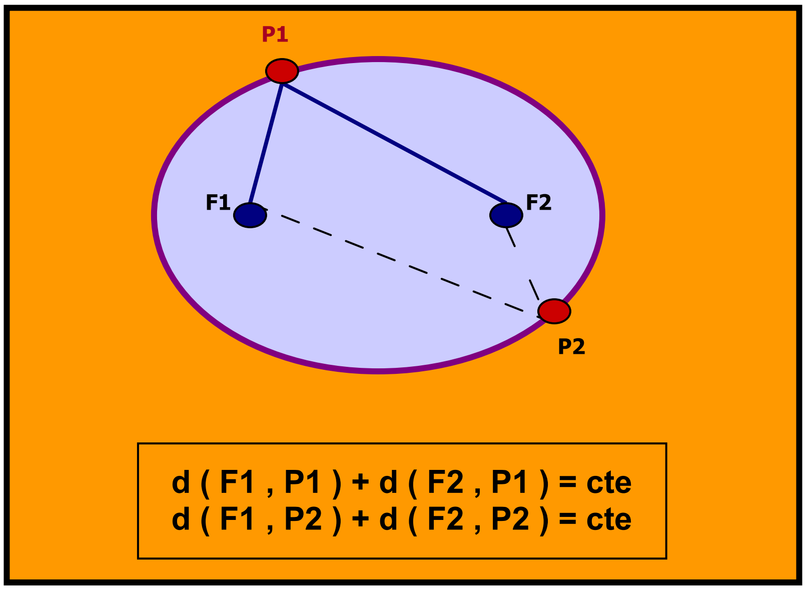
Las competencias que son fortalecidas con la aplicación de la estrategia son, principalmente, *pensar matemáticamente* (planteamiento de preguntas características de las Matemáticas), *razonamiento matemático* (seguimiento y evaluación de cadenas de argumentos hechos por otras personas y descubrimiento de las ideas básicas de un argumento dado) y *representación de entes matemáticos* (comprensión y utilización de diferentes formas de representación de objetos matemáticos).

Objetivo	Caracterización	Conocimiento previos
Comprenderá los conceptos relacionados con lugares geométricos en el plano.	Entiende el concepto geométrico de la elipse. Identifica las propiedades y elementos de la elipse.	Elipse como lugar geométrico. Teorema de Pitágoras. Bisectrices del triángulo y sus propiedades.

El presente documento es la presentación de un enfoque a través de Esferas de Dandelin, para ver el tema de Cónicas. El centro de la propuesta es iniciar el estudio de las cónicas ubicándolas como secciones del cono a partir de su tratamiento como lugares geométricos.

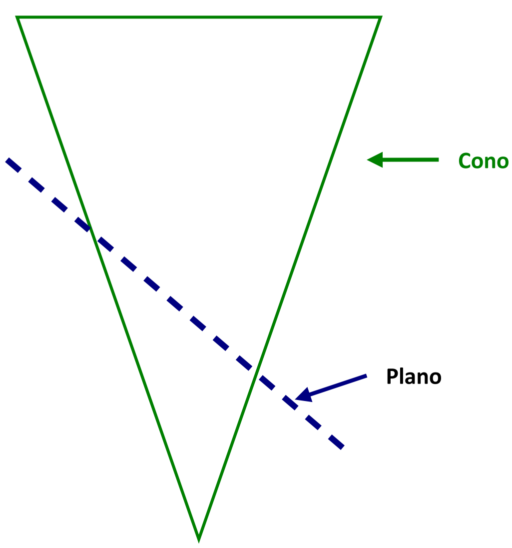
En este trabajo se abordará la elipse aunque este enfoque puede ser usado para el resto de las cónicas.

La definición de lugar geométrico a la que me refiero es la del conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante.

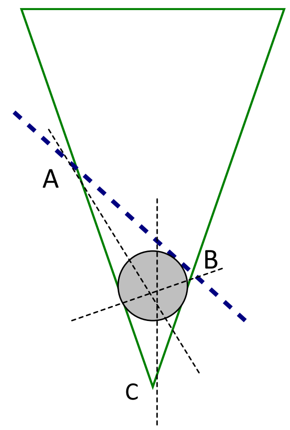


Se pretende demostrar que la curva cerrada obtenida de cualquier corte de un cono con un plano inclinado de tal forma que corte sólo una rama del cono, es una elipse, a partir de la definición como lugar geométrico de ésta.

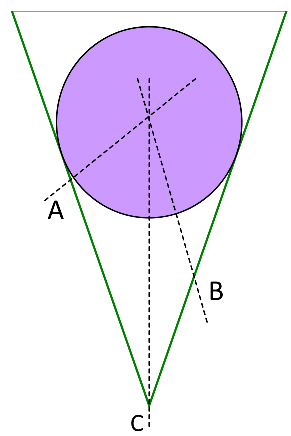
Viendo este dibujo de perfil, observamos



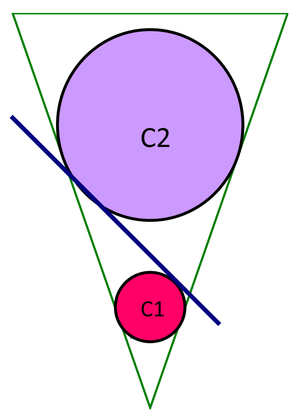
Sobre ese triángulo podemos inscribir una circunferencia cuyo centro es el incentro (punto donde concurren las bisectrices) del triángulo ABC.



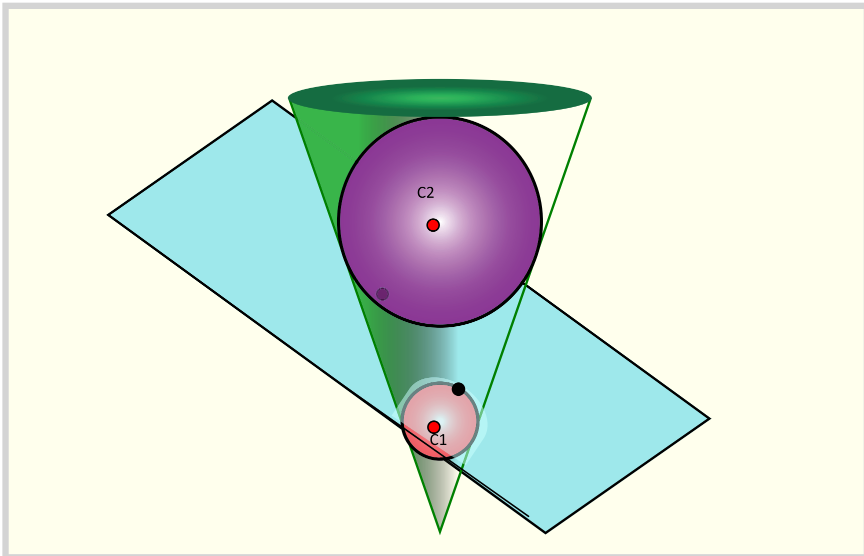
Si intersecamos las bisectrices de los ángulos exteriores, se puede construir otra circunferencia:



Observando ambas construcciones en el mismo dibujo:



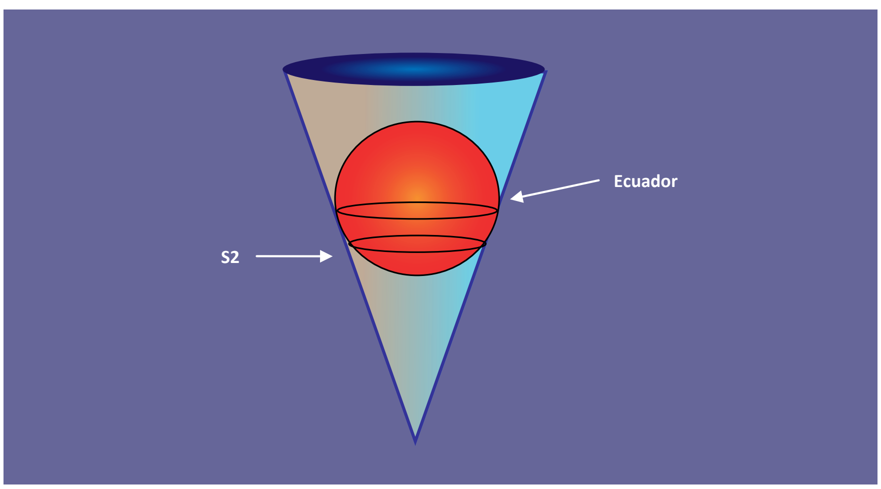
Si volvemos a tres dimensiones, podemos considerar que se trata de dos esferas con centros C1 y C2, respectivamente, que son tangentes al plano, es decir, el plano las toca en un punto a cada una, y por ese punto el plano es perpendicular al radio.



Estas esferas son tangentes al plano que cortó al cono y también son tangentes al cono. Se llaman esferas de Dandelin.

Llamemos
F1: Punto de tangencia de la esfera menor con el plano de la curva que resultó del corte (es la que trataremos de probar que es una elipse).
F2: Punto de tangencia de la esfera mayor con ese mismo plano.

Nótese que estas esferas tocan al cono en dos circunferencias S1 y S2. De hecho, S1 y S2 son las circunferencias de los puntos de tangencia de las esferas respecto al cono y por lo tanto, son perpendiculares al eje del cono.



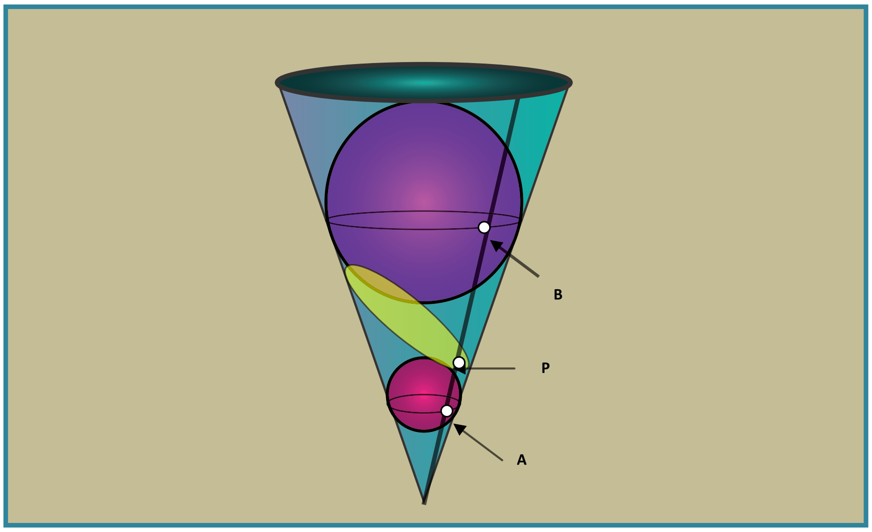
Es importante hacer notar que esas circunferencias no coinciden con el ecuador de las respectivas esferas:

Proposición: La curva cerrada que se obtiene al cortar con este plano inclinado es una elipse cuyos focos son F1 y F2.

Tomemos P un punto sobre la elipse, se quiere concluir entonces que

$$d(P, F1) + d(P, F2) = 2a = \text{constante}$$

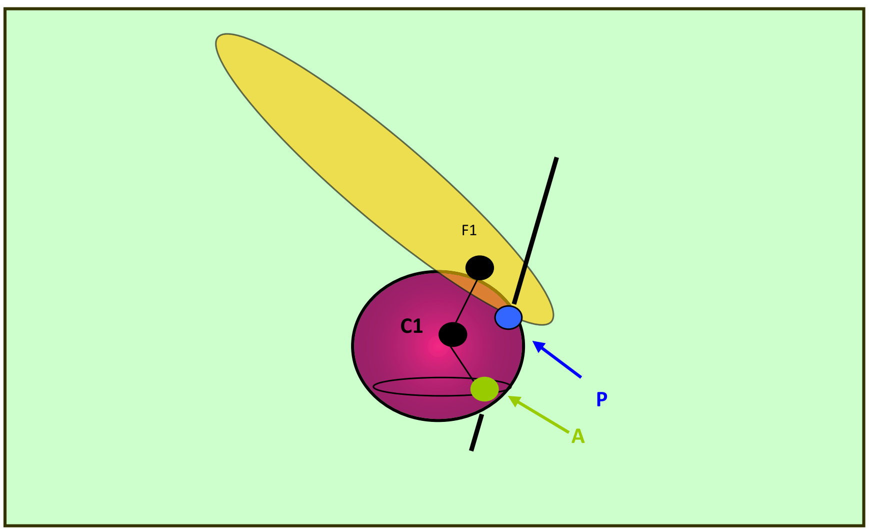
Es importante hacer notar que el punto P está en la superficie del cono.



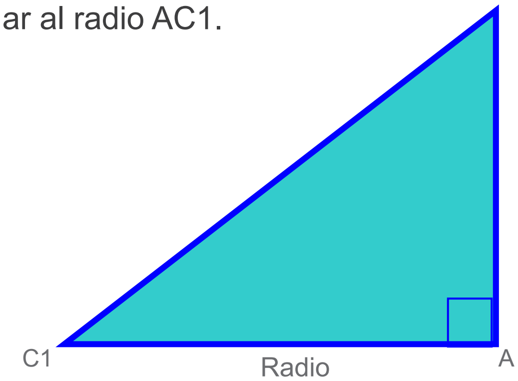
Consideremos la recta en el espacio que pasa por el punto P y por el vértice del cono. Sean A y B los puntos donde esta recta cruza a las circunferencias donde las esferas de Dandelin tocan al cono. Si comparamos d (P , F1) con d (P, A) y d (P , F2) con d (P, B) y, por ende,

$$d(P, F1) + d(P, F2) \text{ con } d(P, A) + d(P, B).$$

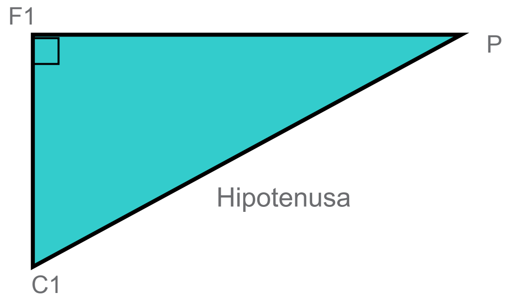
Para comparar d (P, F1) con d (P, A), necesitamos ubicar una figura donde estén P, F1, A.



Consideremos los triángulos PC1A y PC1F1, donde C1 es el centro de la esfera menor y A es un punto donde la esfera menor toca al cono, la recta AP es tangente a la esfera, por tanto, perpendicular al radio AC1.



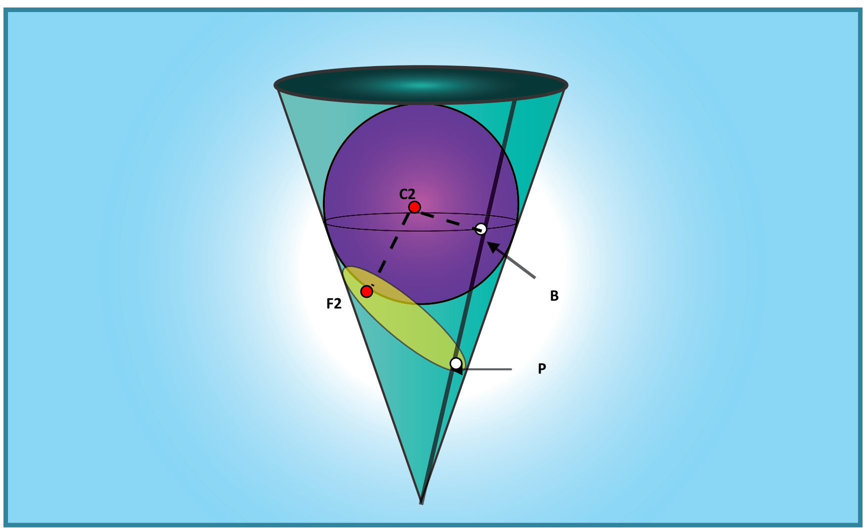
Como F1 es el punto donde el plano cortó al cono toca a la esfera menor, la recta PF1 es recta tangente a la esfera. Por lo tanto PF1 es perpendicular al radio C1 F1, entonces F1C1P es un triángulo rectángulo con hipotenusa C1P y radio C1 F1.



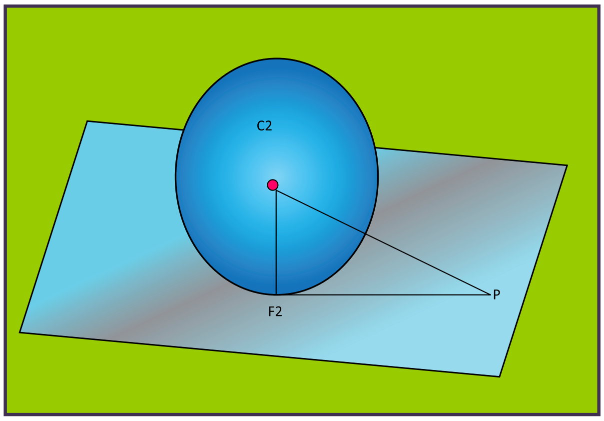
Ambos triángulos rectángulos tienen la misma hipotenusa y uno de sus catetos es el radio de la esfera. Por el Teorema de Pitágoras, queda determinada la longitud del otro cateto, así, los dos triángulos C1PF1 y C1AP son congruentes. Por tanto,

d (P , F1) = d (P, A)

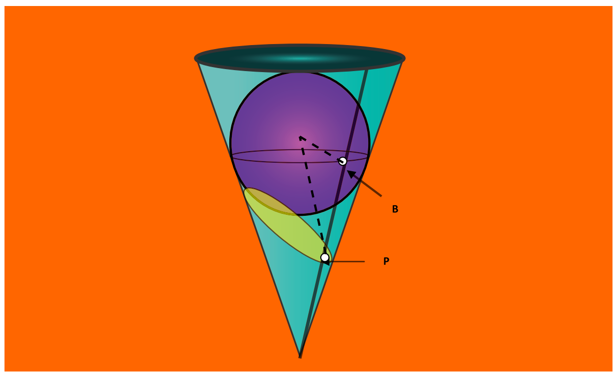
Análogamente para comparar d (P , F2) = d (P, B) necesitamos una figura donde estén P, F2 y B.



Consideremos los triángulos PF2C2 y PBC2, donde C2 es el centro de la esfera mayor. Como F2 es punto de tangencia de la esfera mayor con el plano de la elipse, el triángulo es rectángulo, con cateto C2F2 (que es radio de la esfera mayor) e hipotenusa C2P.

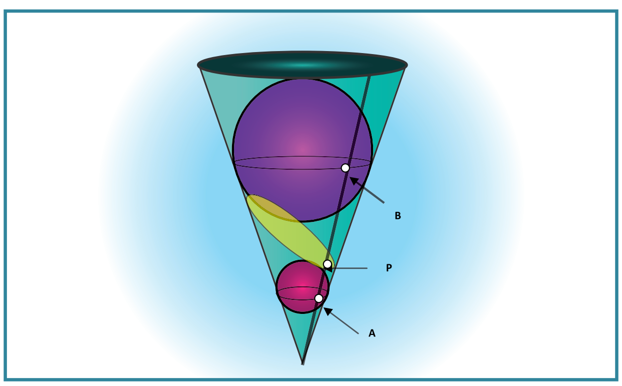


Como B es punto de tangencia de la esfera mayor con el cono, el triángulo C2BP es rectángulo con el radio C2B como cateto y C2P como hipotenusa.



Por ser dos triángulos rectángulos que tienen hipotenusas iguales y un cateto igual, entonces son congruentes y por lo tanto, d (P , F2) = d (P, B), y así, obtenemos que

$$d (P , F1) + d (P , F2) = d (P , A) + d (P , B)$$



Observemos que d (P , A) + d (P , B) = d (A , B) = constante y por tanto,

$$d(P, F1) + d(P, F2) = \text{constante}$$

lo que nos permite concluir que la curva obtenida de la intersección de un plano con un cono es una elipse.

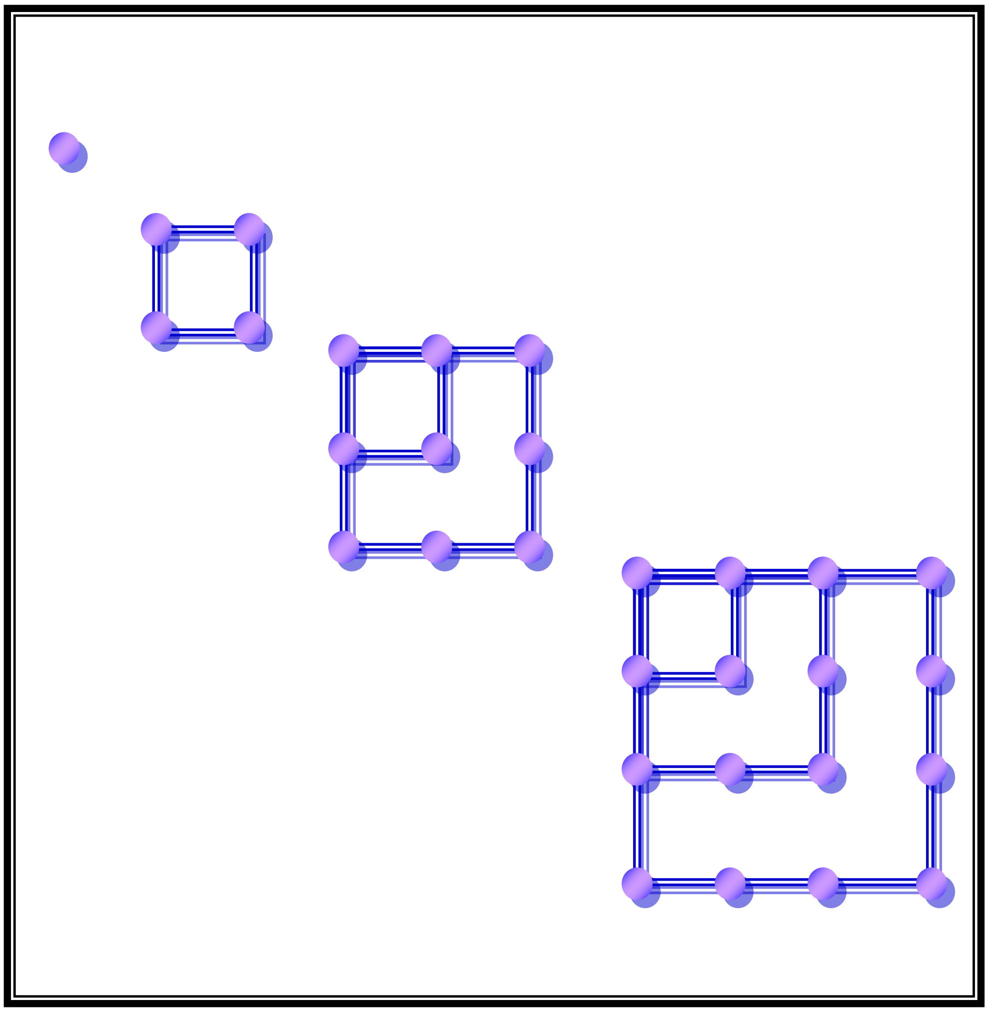
Evaluación

La evaluación se realiza dentro del salón de clases a partir de la participación de los estudiantes durante el desarrollo de la estrategia y en el espacio de asesorías dentro del cual el estudiante debe ser capaz de repetir algunos de los argumentos que permiten demostrar que la curva obtenida al realizar el corte adecuado en el cono con un plano es realmente una elipse.

Fuentes documentales

Wooton, Beckenbach, Fleming, *Geometría Analítica Moderna*, Ed. Publicaciones Cultural, México, 1979. pp. 164-169.

ESTRATEGIAS PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS IV



Análisis gráfico en la computadora

Rafael Marín Salguero

Introducción

La presente estrategia es una muestra de cómo se puede utilizar el software "OCTAVE" para generar actividades que apoyen y enriquezcan el curso de Matemáticas IV a la vez que el estudiante se va familiarizando con comandos usuales en el campo de la programación y su sintaxis.

Se intenta con esto que el estudiante comience a tomar conciencia de la importancia de las funciones matemáticas para modelar fenómenos cambiantes cuyos cambios se pueden medir y dependen, por ejemplo, del tiempo. Por otra parte, utilizando este tipo de software el estudiante puede ser capaz de realizar modificaciones de manera sencilla en el dominio y contradominio de la función con objeto de obtener mejores resultados visuales. Este tipo de habilidad hace que estos conceptos —que normalmente representan un problema importante para el estudiante— sean interiorizados de manera significativa por éste.

Se pueden, por otro lado, realizar distintas actividades que esclarezcan la noción de límite, sus propiedades y su cálculo haciendo que las explicaciones y desarrollos teóricos que se realizan en las otras dos sesiones semanales sean más efectivos.

Competencias a desarrollar en el estudiante

- Deduce propiedades geométricas y algebraicas de las funciones.
- Justifica sus deducciones sobre las propiedades geométricas y algebraicas de las funciones.
- Utiliza las funciones para modelar fenómenos manejando con soltura el lenguaje algebraico.
- Utiliza propiedades aritméticas de las funciones logarítmicas y exponenciales.
- Realiza operaciones con funciones.
- Distingue la variable independiente de la dependiente, y las relaciones a través del dominio, rango e imagen.
- Identifica el efecto en la gráfica de la función al variar sus parámetros.

Criterios a evaluar

- Distingue la variable independiente de la dependiente, y las relaciones a través del dominio, rango e imagen.
- Identifica el efecto en la gráfica de la función al variar sus parámetros.
- Opera y simplifica expresiones algebraicas.
- Realiza operaciones con funciones.
- Utiliza las funciones para modelar fenómenos manejando con soltura el lenguaje algebraico.

Conocimientos previos

- Manejo adecuado de las leyes de los exponentes.
- Factorización y simplificación de expresiones algebraicas.
- Conocimiento básico de programas computacionales.

Material

Programa de cómputo Octave (Linux) o Matlab 5.3 (Windows)

Duración aproximada

1 sesión por semana de hora y media durante todo el semestre (Aproximadamente 12 sesiones)

Objetivos

1. Que los estudiantes comprendan gráficamente los resultados que se van obteniendo en el salón de clases.
2. Que los estudiantes sean capaces de analizar y resolver problemas usando la computadora.
3. Que los estudiantes, gracias al análisis gráfico, sean capaces de hacer inferencias sobre el comportamiento de las funciones al realizar transformaciones, composiciones, etcétera.

Descripción

Una de las características de este curso es que se pudieron fusionar dos grupos de 4to semestre, y que hubo la disponibilidad de horarios del centro de cómputo, ya que este se encuentra generalmente muy saturado por los cursos que se imparten de Computación 1 y 2. En este caso fue muy importante trabajar conjuntamente con el personal de Servicios Escolares y con el Coordinador de Sistemas, ya que sin su apoyo hubiera sido imposible llevar a cabo estas actividades.

La serie de actividades que se proponen tienen como objetivo que los estudiantes se familiaricen con el programa de cómputo Octave (cuando se esté trabajando en la escuela) o del programa Matlab 5.3 (para los que tienen computadoras en su casa, y es necesario tener esta versión ya que no necesita tanta memoria RAM) ya que estos programas facilitan mucho la visualización del comportamiento de las gráficas de las funciones.

En las primeras clases del curso, se tuvo que dar un repaso general de los temas vistos en cursos anteriores, ya que es muy común que la mayoría de los estudiantes olviden los temas vistos. Lo más importante que se vio fueron el manejo de las leyes de los exponentes, la simplificación de expresiones algebraicas, factorización de polinomios, graficación de las secciones cónicas, división de polinomios, etc. (Este repaso en este curso se dio en 3 semanas).

A continuación se muestran los materiales con los que se ha trabajado en clase y en el laboratorio…

Observaciones

- Hasta el momento ha sido de mucha utilidad el uso de la computadora, ya que se ha visto que la mayoría de los estudiantes de este curso si aprecian un poco mejor los temas que se vieron comparándolos con estudiantes de cursos anteriores, que ponían cara de "*Si, y ¿de qué me sirve esto?*", "*¿para qué me sirve saber si una función es par?*", "*¿qué significado tienen las asíntotas?*", etcétera.
- En base a los resultados observados de este curso (que todavía no concluye) se hace patente la importancia de contar con más computadoras en otros espacios que no sea necesariamente el centro de cómputo (por ejemplo, modificar la sala de juntas), ya que así se podrá trabajar desde Matemáticas I hasta Temas Selectos de Matemáticas en la visualización de cada uno de los resultados que se van obteniendo en los cursos, y esto será en beneficio de los estudiantes.

"Conceptos básicos de Octave"

A continuación se mostrarán algunos conceptos básicos que necesitaremos para poder graficar las funciones en la computadora, ya que con estas herramientas nos será mucho más fácil visualizar el comportamiento de las gráficas.

En la escuela tenemos un programa de cómputo llamado OCTAVE, que es una herramienta muy útil para cálculos numéricos. (El siguiente manual se basa en el programa MATLAB de Windows, pero los comandos son idénticos).

¿Qué es lo que necesitamos para graficar las funciones en la computadora? Lo más importante es definir nuestro ***dominio*** (los valores donde la función está definida). Primero definiremos un arreglo numérico llamado x que contendrá 10 elementos, del 1 al 2.

```
>> x = 1 : 0.1 : 2
x =
  Columns 1 through 6
 1        1.1       1.2       1.3       1.4       1.5
  Columns 7 through 11
 1.6      1.7       1.8       1.9       2
```

Aquí lo que hizo la computadora fue:

1. Definió una variable de nombre x
2. El valor inicial de este arreglo es el 1, después hubo un incremento de 0.1 unidades, y termino en el valor 2

Es muy importante esta sintaxis, por lo que lo pondremos en su forma general

```
>> x = punto inicial: incremento: punto final
```

(Son muy importantes los dos puntos (`:`) ya que si no se generaría un error). También se puede poner un punto y coma (`;`) al final para evitar que se vean los datos.

```
>> x = 1 : 0.1 : 2;
```

Ok, podríamos pensar, ya que tenemos este "vector", ¿para qué rayos me sirve? ¡Pues ese es nuestro dominio para cualquier función que deseemos analizar! Por ejemplo, si queremos graficar la siguiente recta

$$y = -3x + 5$$

Entonces lo que tenemos que hacer es definir una nueva variable y donde evaluaremos los valores de x

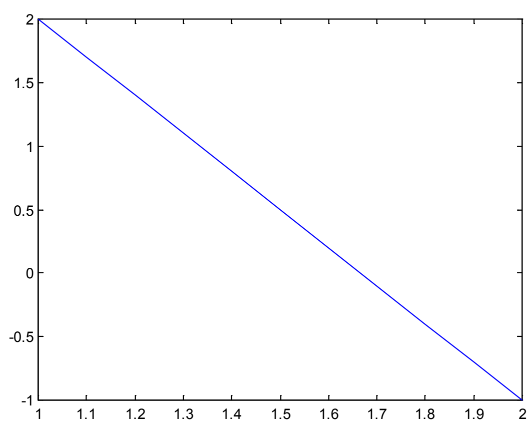
```
>> y = -3*x + 5
y =
Columns 1 through 6
     2     1.7      1.4       1.1         0.8        0.5
  Columns 7 through 11
   0.2    -0.1     -0.4      -0.7          -1
```

Como podemos ver, esto es una herramienta muy poderosa para obtener valores específicos, ya que se calcularon en fracciones de segundo (es más, la computadora se tardó más tiempo en desplegar los resultados que lo que se tardó en calcular los valores).

Aquí viene la parte más importante, ¿cómo le hacemos para graficar los resultados? Pues es muy fácil, sólo tenemos que teclear en la línea de comandos

```
>> plot(x,y)
```

Y obtenemos la siguiente gráfica



¿Qué significa este comando `plot(x,y)`? Matemáticamente es equivalente a graficar las coordenadas $(x, f(x))$. Para entender mejor esto, primero daremos la lista de algunas de las funciones matemáticas que están implementadas en OCTAVE, y después veremos algunos ejemplos más complicados.

`sin(x)`	Seno
`cos(x)`	Coseno
`tan(x)`	Tangente
`sec(x)`	Secante
`csc(x)`	Cosecante
`cot(x)`	Cotangente
`log(x)`	Logaritmo Natural
`log10(x)`	Logaritmo Decimal
`*log_a(x,a)`	Logaritmo en base a de x
`exp(x)`	Exponencial e^x donde $e \approx 2.71828$
`sqrt(x)`	Raíz Cuadrada
`*power(x,a)`	Potencia a-ésima de x x^a
`*nthroot(x,a)`	Raíz a-ésima de x $\sqrt[a]{x}$
`round(x)`	Redondeo hacia el entero más próximo
`fix(x)`	Redondeo hacia el entero más próximo a 0
`floor(x)`	Valor entero más próximo hacia $-\infty$
`ceil(x)`	Valor entero más próximo hacia $+\infty$
`abs(x)`	Valor absoluto
`rem(x,a)`	Residuo al dividir x entre a
`*factorial(x)`	Factorial del número (o vector) x
`*rec_ver(x0,a,b)`	Grafica la recta vertical $x = x_0$ cuyos limites inferiores son los puntos $y = a$ y $y = b$
`*rec_hor(y0,a,b)`	Grafica la recta horizontal $y = y_0$ cuyos limites inferiores son los puntos $x = a$ y $x = b$

* Estas funciones están instaladas en las computadoras de la escuela.

Cada una de estas funciones las iremos trabajando a lo largo del curso, por el momento no las usaremos. Por ejemplo, para ver cómo cambia la parábola $y = x^2$ al aplicar la transformación $y = -3(x-2)^2 + 1$ introducimos en OCTAVE

% Nuestro dominio será desde –2 hasta 2

```
>> x = -2 : 0.01 : 2;
```

% Aquí ponemos la parábola original

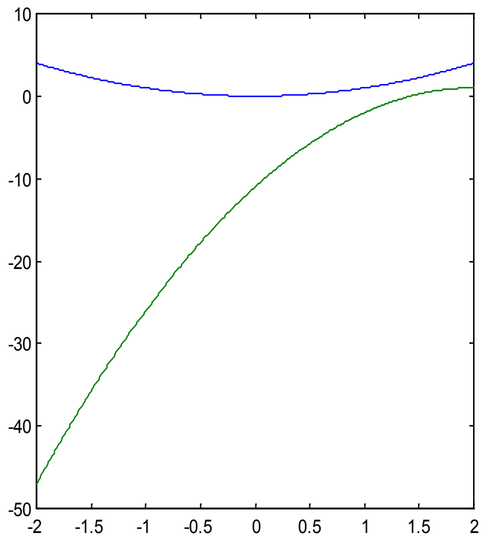
```
>> y1 = power(x,2);
```

% Aquí ponemos la parábola modificada

```
>> y2 = -3.*power(x-2,2) + 1;
```

% Por ultimo vemos la gráfica

```
>> plot(x,y1,x,y2)
```



La gráfica no se aprecia muy bien porque tomamos un dominio muy restringido, y es por eso que hay que tener cuidado con que dominio estemos trabajando. Para ver un ejemplo más complicado, supongamos que queremos encontrar en que puntos las gráficas de $f_1(x) = 2.5^{-1.02x}$ y $f_2(x) = 2\cos(2x - \pi)$ son iguales en el intervalo $[-\pi, \pi]$, entonces lo que tenemos que teclear en OCTAVE es

% Definimos nuestro dominio

```
x = -pi : 0.01 : pi;
```

% Definimos nuestra función 1

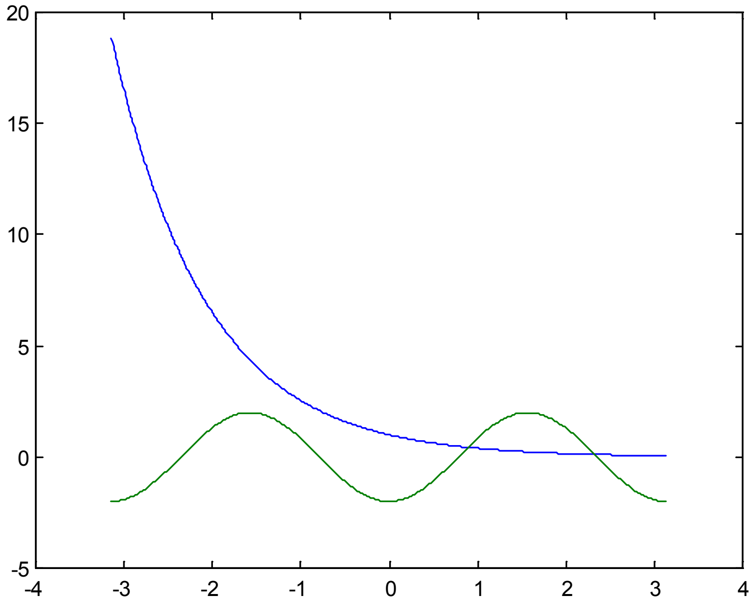
```
y1 = power(2.5,-1.02*x);
```

% Definimos nuestra función 2

```
y2 = 2*cos(2*x - pi);
```

% Graficamos las dos funciones juntas

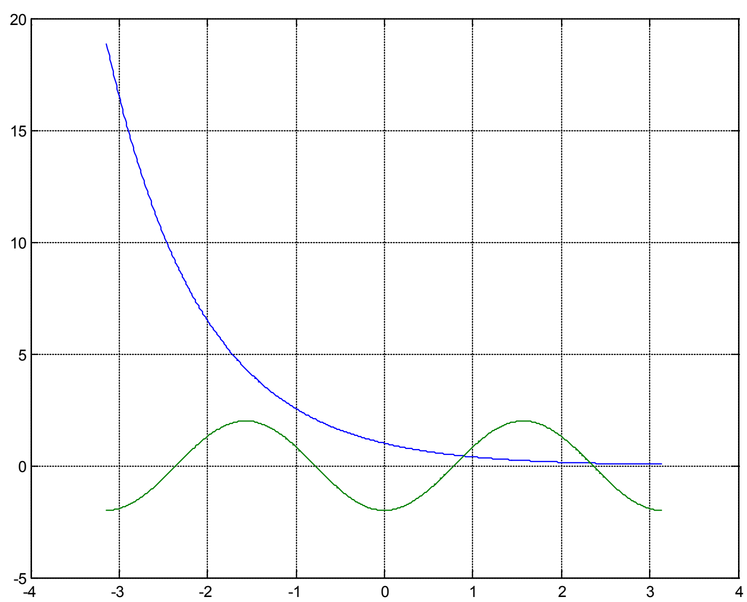
```
plot(x,y1,x,y2)
```



En la gráfica no se aprecia muy bien donde son los puntos en donde se están cruzando las funciones, para poder remediar esto existe una función en OCTAVE que se llama grid on que traza una cuadricula en la gráfica para poder apreciar mejor los puntos por donde pasa la gráfica. Este comando se tiene que introducir **después** del comando plot(x,y).

```
>> x = -pi : 0.01 : pi;
>> y1 = power(2.5,-1.02*x);
>> y2 = 2*cos(2*x - pi);
>> plot(x,y1,x,y2)
>> grid on         % Aquí introducimos el comando
```

Y obtenemos la siguiente gráfica



“Análisis gráfico de las funciones”

A continuación se muestran los gastos de publicidad (en millones de pesos) de una compañía de Internet desde el año de 1995 hasta el año 2001.

Año	Gasto Publicidad
1995 (1)	0
2	0.3
3	0.8
4	1.9
5	3
6	4.3
2001 (7)	5.8

Lo que deseamos es poder pronosticar de cuánto será la publicidad para el año 2002. Se desea comparar dos modelos, uno lineal y uno cuadrático. El modelo lineal es

$$P_1(t) = 0.9857x - 1.6428$$

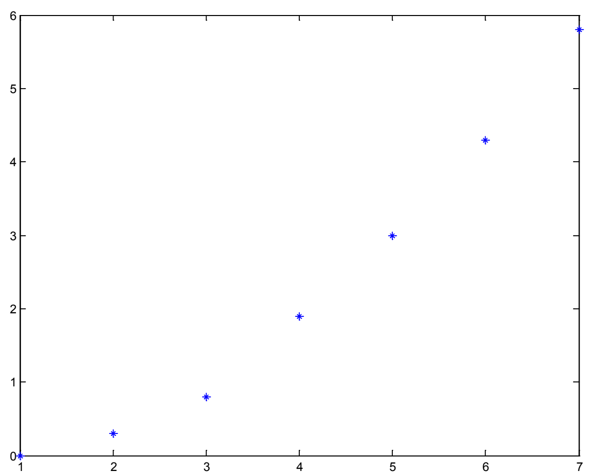
y el modelo cuadrático es

$$P_2(t) = 0.11904x^2 + 0.03333x - 0.214285$$

Lo que necesitamos primero es graficar “puntualmente” los datos observados, entonces en Octave (Matlab) tecleamos las siguientes instrucciones:

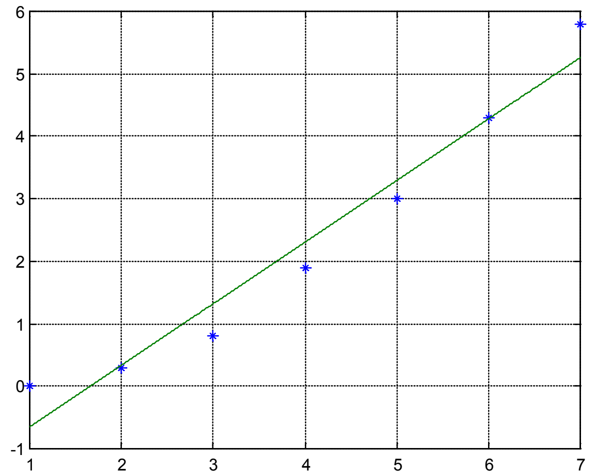
```
>> n = [ 1 2 3 4 5 6 7 ];  % Vector de años
>> g_obs = [0 0.3 0.8 1.9 3 4.3 5.8 ]; % Gastos observados
>> plot(n,g_obs,'*')
```

Y obtenemos la siguiente gráfica



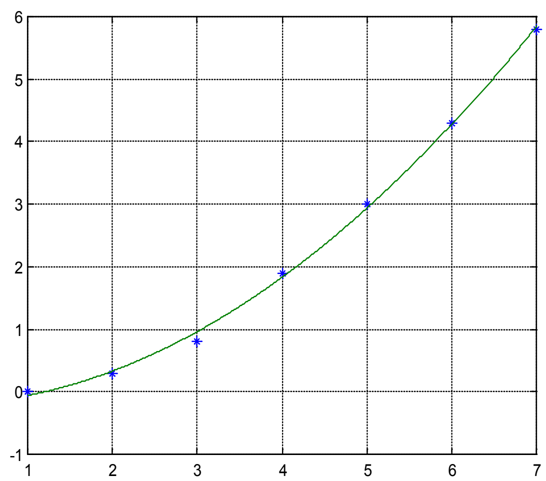
Los corchetes [ ] son para definir vectores, si no los introducen se obtienen errores de que no existe la variable. Ahora lo importante es poder visualizar los dos modelos que tenemos, para poder saber que gráfica se ajusta mejor a los datos observados. Grafiquemos primero el modelo lineal

```
>> t = 1 : 0.001 : 7;  % Nuestro vector tiempo
>> P1 = 0.9857*t - 1.6428; % Nuestra función P1(t)
>> plot(n,g_obs,'*',t,P1) % Los datos observados/estimados
>> grid on
```



A continuación graficaremos el modelo cuadrático

```
>> P2 = polyval([0.11904 0.03333 -0.214285],t);
>> plot(n,g_obs,'*',t,P2)
>> grid on
```



Con esto podemos observar que el modelo cuadrático se ajusta mejor a los datos, por lo cual usaremos este modelo para pronosticar los gastos de publicidad en el 2002.

```
>> polyval([0.11904 0.03333 -0.214285],8) % Año 2002
ans =
                  7.670915
```

Forma de evaluación

- A los estudiantes se les ha dejado trabajos dentro del salón de clases, para poder trabajar con aquellos que tienen algunas dificultades en comprender los temas que se han visto.
- También se han dejado tareas “largas” y con preguntas previamente seleccionadas para cada estudiante, esto con el fin de evitar que se copien las tareas. Hasta el momento ha funcionado. Cuando entregan las tareas se lleva un registro de quienes ya manejan de una manera suficiente el tema, y se les hacen algunas preguntas para poder comprobar que efectivamente ellos la realizaron. Es importante recalcar que no hay exámenes, sino que se evalúa con los trabajos que se les deja (generalmente es una tarea por tema). En caso de que lo entregado no esté bien realizado, se le deja al estudiante que haga las correcciones pertinentes.
- Las tareas no tienen un tiempo fijo para ser entregadas, esto debido a que en este semestre los estudiantes han tenido una carga considerable de trabajo en las demás asignaturas. Se sigue una de las ideas fundamentales de este modelo **el estudiante estudia y trabaja a su ritmo**
- Al final del curso a los estudiantes se les hará una pequeña evaluación “compendiada” que contenga cada uno de los temas vistos durante el curso, esto con la finalidad de poder ver el grado de asimilación que hubo de cada uno de los temas, para poder trabajar estos temas en el intersemestre o en todo caso en el curso de Matemáticas V.

ÍNDICE ANALÍTICO

L

M

N

O

P

R

S

T

V